APÉNDICE IV

La integral de Riemann

Parece ser que todos los peregrinos que suben por las laderas del Parnaso matemático, en un punto u otro de su viaje se sentarán e inventarán una o dos integrales definidas que se unirán al montón general.

J. J. Sylvester (1814-1897)

En la Sección 5.3 presentamos la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ de una función f continua en el intervalo cerrado finito $[a, b]$. La integral se definió como un tipo de «límite» de sumas de Riemann formadas definiendo una partición del intervalo $[a, b]$ en pequeños subintervalos. En este apéndice reformularemos la definición de la integral de forma que se pueda utilizar para funciones que no sean necesariamente continuas. En la presentación que sigue sólo supondremos que f está **acotada** en $[a, b]$. Posteriormente demostraremos el Teorema 2 de la Sección 5.3, que asevera que toda función continua es integrable.

Recuérdese que una **partición** P de $[a, b]$ es un conjunto finito y ordenado de puntos $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, con $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. Esta partición subdivide $[a, b]$ en n subintervalos $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$, donde $n = n(P)$ depende de la partición. La longitud del subintervalo j, $[x_{j-1}, x_j]$, es $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$.

Supongamos que la función f está acotada en $[a, b]$. Dada cualquier partición P, los n conjuntos $S_j = \{f(x) : x_{j-1} \leqslant x \leqslant x_j\}$ tienen cotas superiores mínimas M_j y cotas inferiores máximas m_j, $(1 \leqslant j \leqslant n)$, de forma que

$$m_j \leqslant f(x) \leqslant M_j \quad \text{en} \quad [x_{j-1}, x_j]$$

Definimos sumas de Riemann superior e inferior para f correspondientes a la partición P como

$$U(f, P) = \sum_{j=1}^{n(P)} M_j \Delta x_j \quad \text{y}$$

$$L(f, P) = \sum_{j=1}^{n(P)} m_j \Delta x_j$$

Véase la Figura IV.1. Nótese que si f es continua en $[a, b]$, entonces m_j y M_j son, de hecho, los valores mínimo y máximo de f en $[x_{j-1}, x_j]$ (por el Teorema 6 del Apéndice II), es decir, $m_j = f(l_j)$ y $M_j = f(u_j)$, siendo $f(l_j) \leqslant f(x) \leqslant f(u_j)$ para $x_{j-1} \leqslant x \leqslant x_j$.

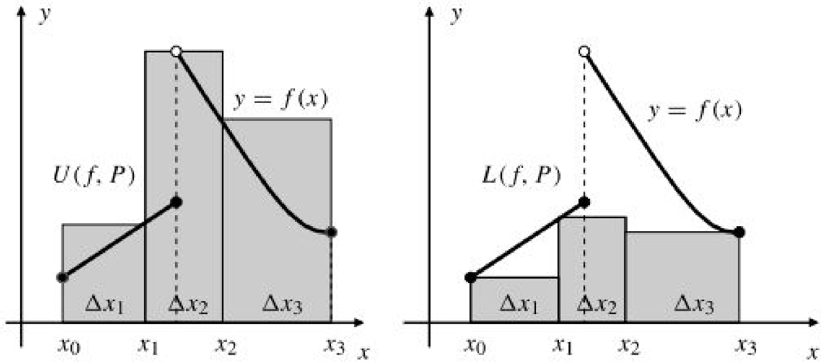


Figura IV.1 Sumas superior e inferior correspondientes a la partición $P = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$.

Si P es una partición cualquiera de $[a, b]$ y creamos una nueva partición P^* añadiendo nuevos puntos de subdivisión a los de P, y subdividiendo así los subintervalos de P en otros más pequeños, denominaremos a P^* un **refinamiento** de P.

TEOREMA 1 Si P^* es un refinamiento de P, entonces $L(f, P^*) \geqslant L(f, P)$ y $U(f, P^*) \leqslant U(f, P)$.

DEMOSTRACIÓN Si S y T son conjuntos de números reales, y $S \subset T$, entonces todo límite inferior (o superior) de T es también una cota inferior (o cota superior) de S. Por lo tanto, la máxima cota inferior de S es como mínimo tan grande como la de T, y la cota superior mínima de S no es mayor que la de T.

Sea P una partición dada de $[a, b]$ y formemos una nueva partición P' añadiendo un nuevo punto de subdivisión a los de P, por ejemplo, el punto k que divide el j-ésimo subintervalo $[x_{j-1}, x_j]$ de P en dos subintervalos $[x_{j-1}, k]$ y $[k, x_j]$ (*véase* la Figura IV.2). Sea m_j, m'_j y m''_j las máximas cotas inferiores de los conjuntos de valores de $f(x)$ en los intervalos $[x_{j-1}, x_j]$, $[x_{j-1}, k]$ y $[k, x_j]$, respectivamente. Entonces, $m_j \leqslant m'_j$ y $m_j \leqslant m''_j$. Por lo tanto, $m_j(x_j - x_{j-1}) \leqslant m'_j(k - x_{j-1}) + m''_j(x_j - k)$, por lo que $L(f, P) \leqslant L(f, P')$.

Si P^* es un refinamiento de P, se puede obtener añadiendo un punto cada vez a los puntos de P y, por tanto, $L(f, P) \leqslant L(f, P^*)$. Se puede demostrar que $U(f, P) \geqslant U(f, P^*)$, de forma similar.

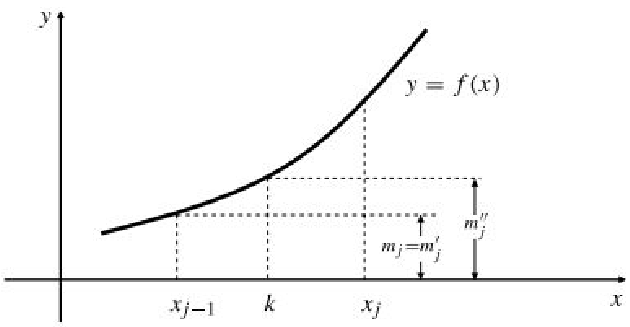


Figura IV.2 Adición de un punto a una partición.

TEOREMA 2 Si P y P' son dos particiones cualesquiera de $[a, b]$, entonces $L(f, P) \leqslant U(f, P')$.

DEMOSTRACIÓN Combinemos los puntos de subdivisión de P y P' para formar una nueva partición P^*, que es un refinamiento tanto de P como de P'. Entonces, por el Teorema 1,

$$L(f, P) \leqslant L(f, P^*) \leqslant U(f, P^*) \leqslant U(f, P')$$

Ninguna suma inferior puede superar a una suma superior.

El Teorema 2 demuestra que el conjunto de valores de $L(f, P)$ para f fijo y varias particiones P de $[a, b]$ es un conjunto acotado; toda suma superior es una cota superior de este conjunto. Por completitud, el conjunto tiene una cota superior mínima, que denominaremos I_*. Por tanto, $L(f, P) \leqslant I_*$ para toda partición P. De forma similar, existe una cota inferior máxima I^* para el conjunto de valores $U(f, P)$ correspondiente a diferentes particiones P. Se deduce que $I_* \leqslant I^*$ (*véase* el Ejercicio 4 al final de este apéndice).

DEFINICIÓN 1 La integral de Riemann

Si f está acotada en $[a, b]$ e $I_* = I^*$, entonces se dice que f es **integrable por Riemann**, o simplemente **integrable** en $[a, b]$, y entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = I_* = I^*$$

es la **integral (de Riemann)** de f en $[a, b]$.

El siguiente teorema proporciona una forma conveniente de determinar si una función acotada dada es integrable:

TEOREMA 3 La función acotada f es integrable en $[a, b]$ si y sólo si para todo número positivo ϵ existe una partición P de $[a, b]$ tal que $U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$.

DEMOSTRACIÓN Supongamos que para todo $\epsilon > 0$ existe una partición P de $[a, b]$ tal que $U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$; entonces

$$I^* \leqslant U(f, P) < L(f, P) + \epsilon \leqslant I_* + \epsilon$$

Como $I^* < I_* + \epsilon$ debe cumplirse para todo $\epsilon > 0$, se deduce que $I^* \leqslant I_*$. Como ya sabemos que $I^* \geqslant I_*$, tenemos $I^* = I_*$ y f es integrable en $[a, b]$.

A la inversa, si tenemos $I^* = I_*$ y $\epsilon > 0$, podemos obtener una partición P' tal que $L(f, P') > I_* - \epsilon/2$ y otra partición P'' tal que $U(f, P'') < I^* + \epsilon/2$. Si P es un refinamiento común de P' y P'', entonces por el Teorema 1 tenemos que se requiere que $U(f, P) - L(f, P) \leqslant U(f, P'') - L(f, P') < (\epsilon/2) + (\epsilon/2) = \epsilon$.

Ejemplo 1 Sea $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leqslant x < 1 \text{ o } 1 < x \leqslant 2 \\ 1 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$

Demuestre que f es integrable en $[0, 2]$ y calcule $\int_0^2 f(x)\,dx$.

Solución Supongamos $\epsilon > 0$. Sea $P = \{0, 1 - \epsilon/3, 1 + \epsilon/3, 2\}$. Entonces $L(f, P) = 0$ ya que $f(x) = 0$ en puntos de cada uno de los subintervalos en los que P subdivide a $[0, 2]$ (*véase* la Figura IV.3). Como $f(1) = 1$, tenemos

$$U(f, P) = 0\left(1 - \frac{\epsilon}{3}\right) + 1\left(\frac{2\epsilon}{3}\right) + 0\left(2 - \left(1 + \frac{\epsilon}{3}\right)\right) = \frac{2\epsilon}{3}$$

Por tanto, $U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$ y f es integrable en $[0, 2]$. Como $L(f, P) = 0$ para toda partición, $\int_0^2 f(x)\,dx = I_* = 0$.

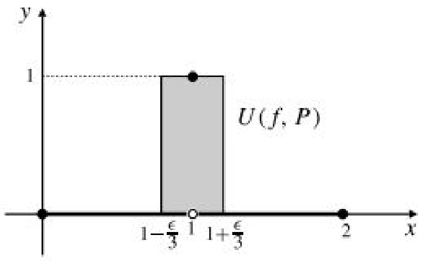


Figura IV.3

Ejemplo 2 Sea $f(x)$ una función definida en [0, 1] como

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \text{ es racional} \\ 0 & \text{si} \quad x \text{ es irracional} \end{cases}$$

Demuestre que f no es integrable en [0, 1].

DEMOSTRACIÓN Todo subintervalo de [0, 1] con longitud positiva contiene números racionales e irracionales. Por tanto, para toda partición P de [0, 1] tenemos $L(f, P) = 0$ y $U(f, P) = 1$. Entonces, $I_* = 0$ e $I^* = 1$, por lo que f no es integrable en [0, 1].

Continuidad Uniforme

Cuando aseguramos que una función f es continua en el intervalo $[a, b]$, esto implica que para todo x en dicho intervalo y para todo $\epsilon > 0$ se puede encontrar un entero positivo δ que depende de x y ϵ tal que $|f(y) - f(x)| < \epsilon$ siempre que $|y - x| < \delta$ e y está en $[a, b]$. De hecho, sin embargo, es posible obtener un número δ *que depende sólo de* ϵ tal que $|f(y) - f(x)| < \epsilon$ se cumple siempre que x e y pertenezcan a $[a, b]$ y cumplan $|y - x| < \delta$. Describiremos este fenómeno diciendo que f es **uniformemente continua** en el intervalo $[a, b]$.

TEOREMA 4 Si f es continua en el intervalo cerrado finito $[a, b]$, entonces es uniformemente continua en dicho intervalo.

DEMOSTRACIÓN Supongamos $\epsilon > 0$. Definamos números x_n en $[a, b]$ y subconjuntos S_n de $[a, b]$ como sigue:

$$x_1 = a$$
$$S_1 = \left\{x : x_1 < x \leqslant b \text{ y } |f(x) - f(x_1)| \geqslant \frac{\epsilon}{3}\right\}$$

Si S_1 es vacío, terminamos. Si no, hacemos

$$x_2 = \text{la máxima cota inferior de } S_1$$
$$S_2 = \left\{x : x_2 < x \leqslant b \text{ y } |f(x) - f(x_2)| \geqslant \frac{\epsilon}{3}\right\}$$

Si S_2 es vacío, terminamos. Si no, procedemos a definir x_3 y S_3 de forma análoga. Procedemos de esta forma en la medida en que podamos; si han sido definidos x_n y S_n y S_n no es vacío, definimos

$$x_{n+1} = \text{máxima cota inferior de } S_n$$
$$S_{n+1} = \left\{x : x_{n+1} < x \leqslant b \text{ y } |f(x) - f(x_{n+1})| \geqslant \frac{\epsilon}{3}\right\}$$

En cualquier etapa donde S_n no sea vacía, la continuidad de f en x_n asegura que $x_{n+1} > x_n$ y $|f(x_{n+1}) - f(x_n)| = \epsilon/3$.

Debemos considerar dos posibilidades para el procedimiento anterior: o bien S_n es vacía para algún n, o bien S_n es no vacía para todo n.

Supongamos que S_n es no vacío para todo n. Entonces hemos construido una secuencia infinita y creciente $\{x_n\}$ en $[a, b]$ que, estando acotada superiormente (por b), debe tener un límite por completitud (Teorema 2 del Apéndice II). Sea $\lim x_n = x^*$. Tenemos $a \leqslant x^* \leqslant b$. Como f es continua en x^*, existe un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(x^*)| < \epsilon/8$ siempre que $|x - x^*| < \delta$ y x esté en $[a, b]$. Como $\lim x_n = x^*$ existe un entero positivo N tal que $|x_n - x^*| < \delta$ siempre que $n \geqslant N$. Para ese n tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\epsilon}{3} = |f(x_{n+1}) - f(x_n)| &= |f(x_{n+1}) - f(x^*) + f(x^*) - f(x_n)| \\ &\leqslant |f(x_{n+1}) - f(x^*)| + |f(x_n) - f(x^*)| \\ &< \frac{\epsilon}{8} + \frac{\epsilon}{8} = \frac{\epsilon}{4}\end{aligned}$$

que es claramente imposible. Por tanto S_n debe, de hecho, ser vacía para algún n.

Supongamos que S_N es vacío. Por tanto, S_n es no vacío para $n < N$, y el procedimiento para definir x_n se detiene para x_N. Como S_{N-1} es no vacío, $x_N < b$. En este caso definimos $x_{N+1} = b$ y sea

$$\delta = \text{mín}\,\{x_2 - x_1, x_3 - x_2, ..., x_{N+1} - x_N\}$$

El mínimo de un conjunto finito de números positivos es un número positivo, por lo que $\delta > 0$. Si x está en $[a, b]$, entonces x pertenece a uno de los intervalos $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, ..., $[x_N, x_{N+1}]$. Supongamos que x está en $[x_k, x_{k+1}]$. Si y está en $[a, b]$, y $|y - x| < \delta$, entonces y está o en el mismo subintervalo que x o en uno adyacente; es decir, y está en $[x_j, x_{j+1}]$, con $j = k - 1$, k, o $k + 1$. Por tanto,

$$\begin{aligned}|f(y) - f(x)| &= |f(y) - f(x_j) + f(x_j) - f(x_k) + f(x_k) - f(x)| \\ &\leqslant |f(y) - f(x_j)| + |f(x_j) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(x)| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon\end{aligned}$$

como queríamos demostrar.

Estamos ahora en condiciones de demostrar que una función continua es integrable.

TEOREMA 5 Si f es continua en $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$.

DEMOSTRACIÓN Por el Teorema 4, f es uniformemente continua en $[a, b]$. Sea $\epsilon > 0$. Sea $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \epsilon/(b - a)$ siempre que $|x - y| < \delta$ y x e y pertenezcan a $[a, b]$. Escojamos una partición $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ de $[a, b]$ para la que cada subintervalo $[x_{j-1}, x_j]$ tenga longitud $\Delta x_j < \delta$. Entonces la máxima cota inferior, m_j, y la mínima cota superior, M_j, del conjunto de valores de $f(x)$ en $[x_{j-1}, x_j]$ cumplen $M_j - m_j < \epsilon/(b - a)$. De acuerdo con esto,

$$U(f, P) - L(f, P) < \frac{\epsilon}{b - a} \sum_{j=1}^{n(P)} \Delta x_j = \frac{\epsilon}{b - a}(b - a) = \epsilon$$

Por tanto, f es integrable en $[a, b]$, como queríamos demostrar.

Ejercicios: Apéndice IV

1. Sea $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{si} \quad 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$. Demuestre que f es integrable en $[0, 2]$ y calcule el valor de $\int_0^2 f(x)\,dx$.

2. Sea $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1/n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \\ 0 & \text{para todos los demás valores de } x. \end{cases}$ Demuestre que f es integrable en $[0, 1]$ y calcule el valor de la integral $\int_0^1 f(x)\,dx$.

3. Sea $f(x) = 1/n$ si $x = m/n$ con m, n enteros sin factores comunes, y sea $f(x) = 0$ si x es un número irracional. Por tanto, $f(1/2) = 1/2$, $f(1/3) = f(2/3) = 1/3$, $f(1/4) = f(3/4) = 1/4$, etc. Demuestre que f es integrable en $[0, 1]$ y calcule $\int_0^1 f(x)\,dx$. *Sugerencia:* Demuestre que para todo $\epsilon > 0$ sólo un número finito de puntos en la gráfica de f en $[0, 1]$ está por encima de la recta $y = \epsilon$.

4. Demuestre que I_* e I^* definidas en el párrafo que sigue al Teorema 2 cumplen $I_* \leqslant I^*$ como allí se indica.

5. Demuestre los apartados (c), (d), (e), (f), (g) y (h) del Teorema 3 de la Sección 5.4 para la integral de Riemann.

6. Utilice la definición de continuidad uniforme dada en el Teorema 4 del párrafo anterior para demostrar que $f(x) = \sqrt{x}$ es uniformemente continua en $[0, 1]$. No utilice el propio Teorema 4.

7. Demuestre directamente a partir de la definición de continuidad uniforme (sin utilizar el Teorema 5 del Apéndice II) que una función f uniformemente continua en un intervalo abierto finito está necesariamente acotada en dicho intervalo.

8. Si f es acotada e integrable en $[a, b]$, demuestre que $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es uniformemente continua en $[a, b]$ (si f fuera continua, tendríamos un resultado más fuerte; F sería diferenciable en (a, b) y $F'(x) = f(x)$, que es el Teorema Fundamental del Cálculo).

APÉNDICE V

Realización de cálculos con Maple

Pienso, luego existo

René Descartes (1596-1650)
de *Discurso del método*

IA [Inteligencias Artificiales] piensan, luego existo

David Brane
de *APC Magazine, noviembre 2003*

Los sistemas de matemáticas por computador como Maple y Mathematica son capaces de realizar la mayor parte de las operaciones tediosas al practicar las matemáticas, especialmente las operaciones intensivas necesarias en muchos problemas de aplicación (por supuesto, no pueden pensar por nosotros, y tenemos que entender completamente lo que estamos haciendo, así como las limitaciones de estos programas). A lo largo de este libro hemos insertado material que ilustra cómo utilizar **Maple** para realizar operaciones comunes en el cálculo. Estas inserciones varían en longitud desde simples párrafos y observaciones hasta secciones enteras. Para ayudarnos a localizar el material de Maple apropiado para temas específicos, incluimos a continuación una lista con referencias a las secciones del texto que contienen ejemplos de Maple y las páginas donde comienzan.

Nótese, sin embargo, que este material asume que estamos familiarizados con los aspectos básicos de inicio de una sesión en Maple, preferiblemente con una interfaz de usuario gráfica que presenta el signo > para solicitar una entrada de usuario. En este texto la entrada se muestra en tipo Courier, y normalmente finaliza con un punto y coma (;) seguido por la pulsación de la tecla `<enter>`, que omitimos en los ejemplos presentados.

La salida impresa por Maple se presenta en el centro de la ventana, en tipo normal. Por ejemplo

```
> factor(x^2-x-2);
```

$$(x+1)(x-2)$$

La salida se puede suprimir utilizando dos puntos (:) en vez de punto y coma al final de la entrada.

El autor ha utilizado Maple 9 en la preparación de los ejemplos de la presente edición. Dichos ejemplos no pretenden ser completos ni exhaustivos. Para un tratamiento más completo de Maple como una herramienta de cálculo, el autor recomienda con encarecimiento el excelente manual de laboratorio de Maple *Calculus: The Maple Way*, escrito por su colega, el profesor Robert Israel, de la Universidad de British Columbia. El libro se encuentra publicado por Pearson Canada bajo el logo de Addison Wesley.

Lista de ejemplos de Maple con su presentación

Varios ejemplos de la lista anterior ocupan varias páginas. Sólo se indica la primera.

Respuestas a los ejercicios de numeración impar

Capítulo P

Preliminares

Sección P.1 (página 10)

1. $0.\overline{2}$ **3.** $4/33$

5. $1/7 = 0.\overline{142857}$, $2/7 = 0.\overline{285714}$,
$3/7 = 0.\overline{428571}$, $4/7 = 0.\overline{571428}$,
$5/7 = 0.\overline{714285}$, $6/7 = 0.\overline{857142}$

7. $[0, 5]$ **9.** $(-\infty, -6) \cup (-5, \infty)$

11. $(-2, \infty)$ **13.** $(-\infty, -2)$

15. $(-\infty, 5/4]$ **17.** $(0, \infty)$

19. $(-\infty, 5/3) \cup (2, \infty)$ **21.** $[0, 2]$

23. $(-2, 0) \cup (2, \infty)$ **25.** $[-2, 0) \cup [4, \infty)$

27. $x = -3, 3$ **29.** $t = -1/2, -9/2$

31. $s = -1/3, 17/3$ **33.** $(-2, 2)$

35. $[-1, 3]$ **37.** $\left(\frac{5}{3}, 3\right)$

39. $[0, 4]$ **41.** $x > 1$

43. verdadero si $a \geqslant 0$, falso si $a < 0$

Sección P.2 (página 18)

1. $\Delta x = 4$, $\Delta y = -3$, dist $= 5$

3. $\Delta x = -4$, $\Delta y = -4$, dist $= 4\sqrt{2}$

5. $(2, -4)$

7. circunferencia, centro $(0, 0)$, radio 1

9. puntos en el interior de un círculo, centro $(0, 0)$, radio 1

11. puntos sobre y por encima de la parábola $y = x^2$

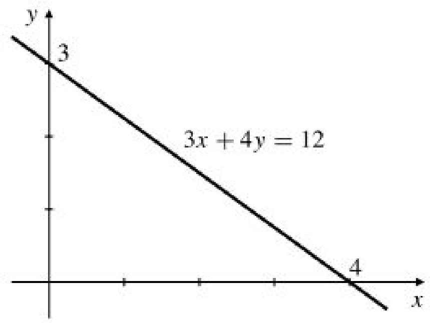
13. (a) $x = -2$, (b) $y = 5/3$

15. $y = x + 2$ **17.** $y = 2x + b$

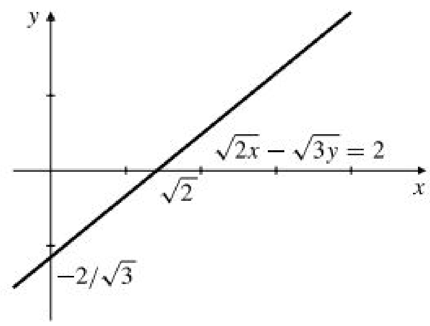
19. por encima **21.** $y = 3x/2$

23. $y = (7 - x)/3$ **25.** $y = \sqrt{2} - 2x$

27. 4, 3



29. $\sqrt{2}$, $-2/\sqrt{3}$



31. (a) $y = x - 1$, (b) $y = -x + 3$

33. $(2, -3)$ **37.** 5

39. 23,000 \$ **43.** $(-2, -2)$

45. $\left(\frac{1}{3}(x_1 + 2x_2), \frac{1}{3}(y_1 + 2y_2)\right)$

47. circunferencia, centro $(2, 0)$, radio 4

49. perp. si $k = -8$, paralela si $k = 1/2$

Sección P.3 (página 28)

1. $x^2 + y^2 = 16$ **3.** $x^2 + y^2 + 4x = 5$

5. $(1, 0)$, 2 **7.** $(1, -2)$, 3

9. exterior de la circunferencia, centro (0, 0), radio 1

11. disco cerrado, centro $(-1, 0)$, radio 2

13. región con forma de anillo entre las circunferencias de radio 1 y 2 centradas en (0, 0)

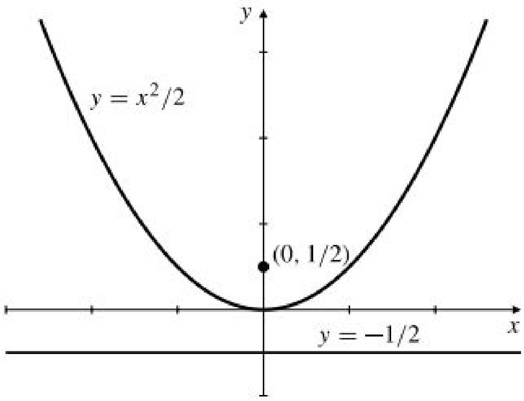
15. región del primer octante en el interior de las dos circunferencias de radio 1 centradas en (1, 0) y (0, 1)

17. $x^2 + y^2 + 2x - 4y < 1$

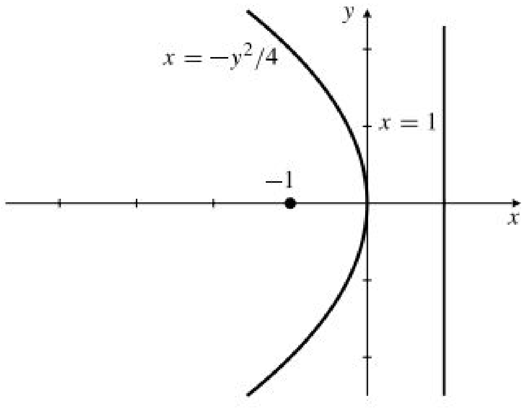
19. $x^2 + y^2 < 2, x \geqslant 1$

21. $x^2 = 16y$ **23.** $y^2 = 8x$

25. $(0, 1/2)$, $y = -1/2$



27. $(-1, 0)$, $x = 1$



29. (a) $y = x^2 - 3$,
(b) $y = (x - 4)^2$,
(c) $y = (x - 3)^2 + 3$,
(d) $y = (x - 4)^2 - 2$

31. $y = \sqrt{(x/3) + 1}$

33. $y = \sqrt{(3x/2) + 1}$

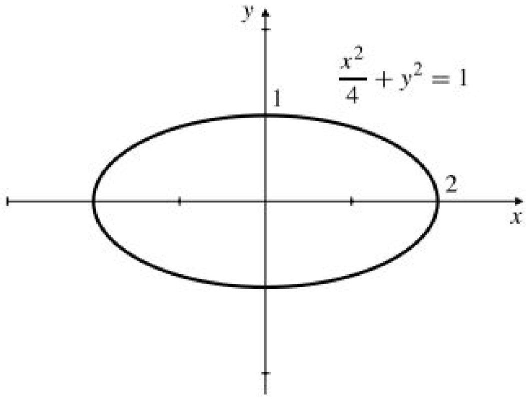
35. $y = -(x + 1)^2$

37. $y = (x - 2)^2 - 2$

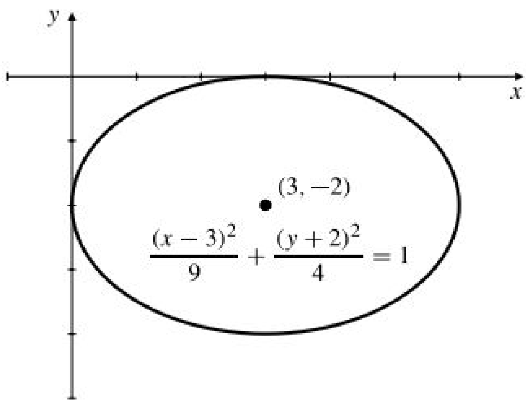
39. (2, 7), (1, 4)

41. $(4, -3)$ $(-4, 3)$

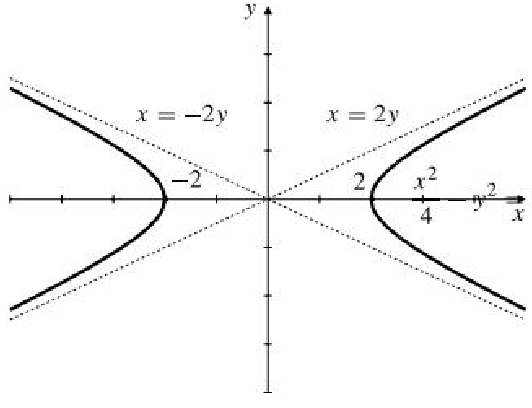
43. elipse, centro (0, 0), semiejes 2, 1



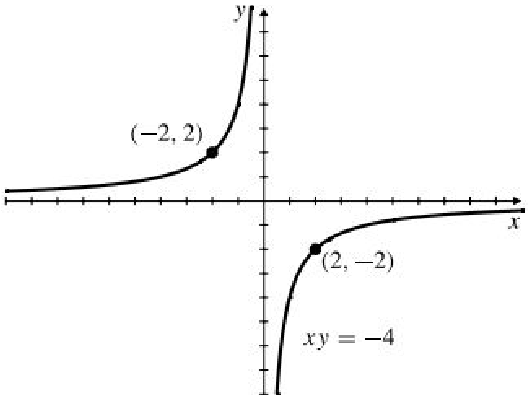
45. elipse, centro $(3, -2)$, semiejes 3, 2



47. hipérbola, centro (0, 0), asíntotas $x = \pm 2y$, vértices $(\pm 2, 0)$

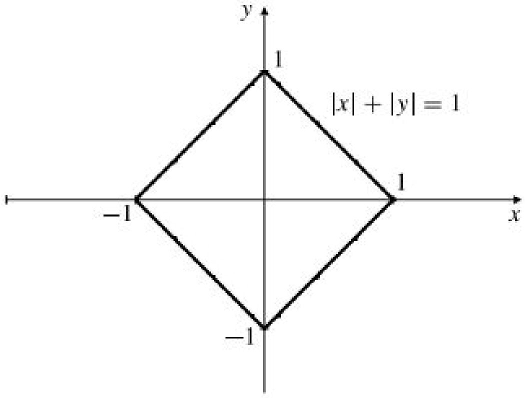


49. hipérbola rectangular, asíntotas $x = 0$ e $y = 0$, vértices $(2, -2)$ y $(-2, 2)$



51. (a) reflejar la gráfica en el eje *y*, (b) reflejar la gráfica en el eje *x*.

53.



Sección P.4 (página 38)

1. $\mathscr{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathscr{R}(f) = [1, \infty)$

3. $\mathscr{D}(G) = (-\infty, 4]$, $\mathscr{R}(g) = [0, \infty)$

5. $\mathscr{D}(h) = (-\infty, 2)$, $\mathscr{R}(h) = (-\infty, \infty)$

7. Sólo (ii) es la gráfica de una función. Las rectas verticales pueden cruzar a las otras en más de un punto.

11. par, simétrica respecto al eje *y*

13. impar, simétrica respecto a (0, 0)

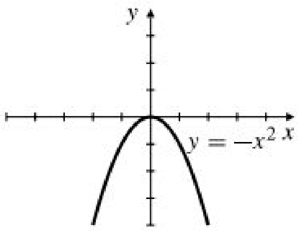
15. simétrica respecto a (2, 0)

17. simétrica respecto a $x = 3$

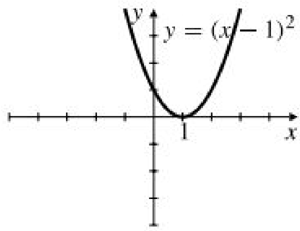
19. par, simétrica respecto al eje *y*

21. no simétrica

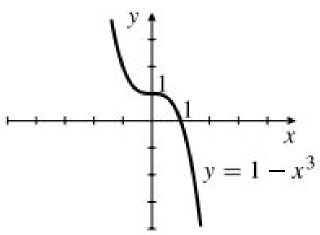
23.



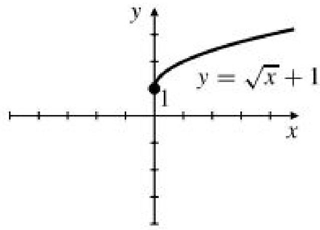
25.



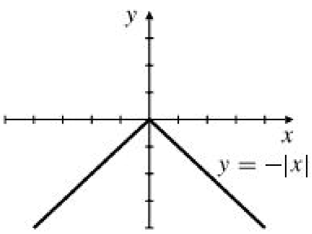
27.



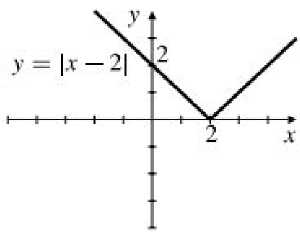
29.



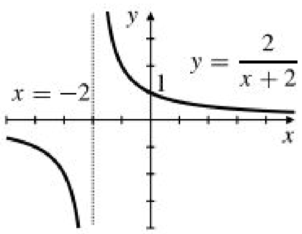
31.



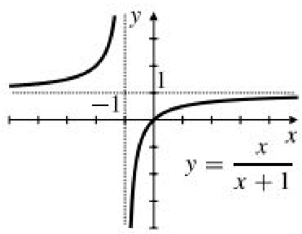
33.

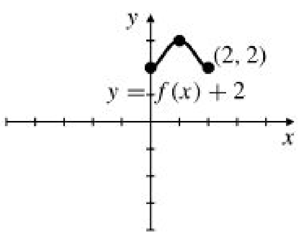


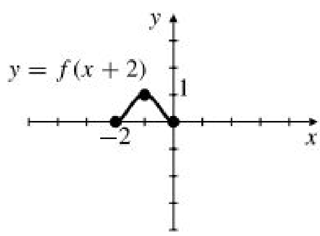
35.



37.



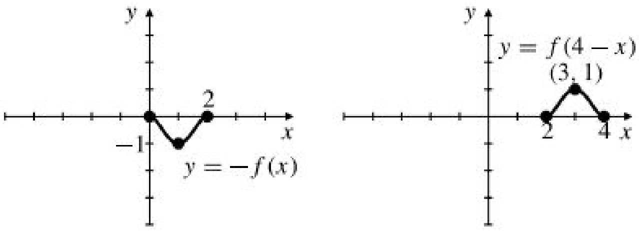




39. $\mathscr{D} = [0, 2]$, $\mathscr{R} = [2, 3]$

41. $\mathscr{D}[-2, 0]$, $\mathscr{R}[0, 1]$

43. $\mathcal{D}[0, 2]$, $\mathcal{R} = [-1, 0]$



45. $\mathcal{D} = [2, 4]$, $\mathcal{R} = [0, 1]$ **47.** $[-0.18, 0.68]$

49. $y = 3/2$

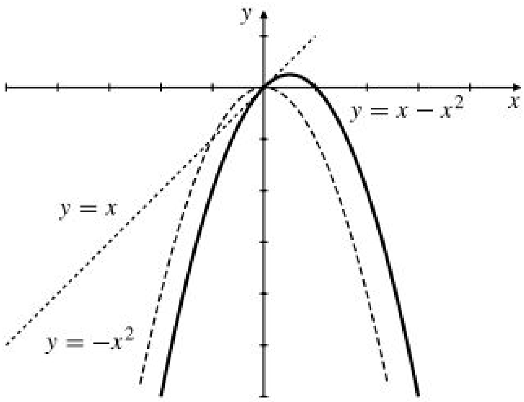
51. $(2, 1)$, $y = x - 1$, $y = 3 - x$

53. $f(x) = 0$

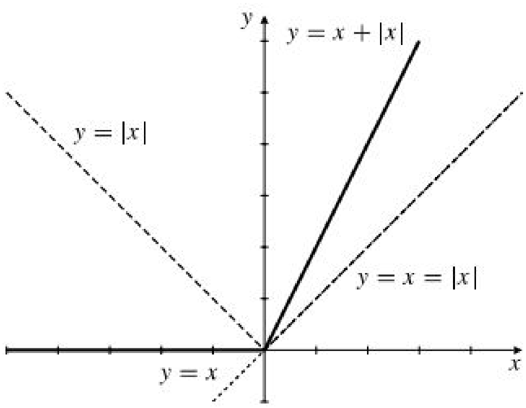
Sección P.5 (página 45)

1. Los dominios de $f + g$, $f - g$, fg y g/f son $[1, \infty)$. El dominio de f/g es $(1, \infty)$.
$(f + g)(x) = x + \sqrt{x - 1}$
$(f - g)(x) = x - \sqrt{x - 1}$
$(fg)(x) = x\sqrt{x - 1}$
$(f/g)(x) = x/\sqrt{x - 1}$
$(g/f)(x) = \sqrt{x - 1}/x$

3.



5.

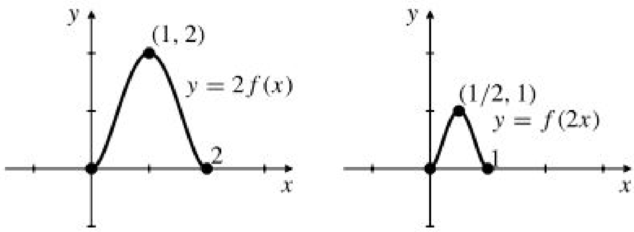


7. (a) 2, (b) 22, (c) $x^2 + 2$, (d) $x^2 + 10x + 22$, (e) 5, (f) -2, (g) $x + 10$, (h) $x^4 - 6x^2 + 6$

9. (a) $(x - 1)/x$, $x \neq 0, 1$,
(b) $1/(1 - \sqrt{x - 1})$ en $[1, 2) \cup (2, \infty)$
(c) $\sqrt{x/(1 - x)}$, en $[0, 1)$
(d) $\sqrt{\sqrt{x - 1} - 1}$, en $[2, \infty)$

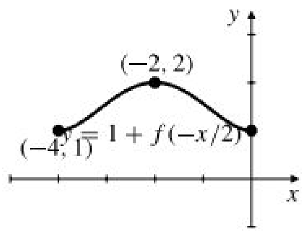
11. $(x + 1)^2$ **13.** x^2

15. $1/(x - 1)$ **19.** $\mathcal{D} = [0, 2]$, $\mathcal{R} = [0, 2]$



21. $\mathcal{D} = [0, 1]$, $\mathcal{R} = [0, 1]$

23. $\mathcal{D} = [-4, 0]$, $\mathcal{R} = [1, 2]$

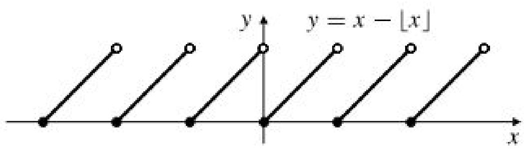


25.

27. (a) $A = 0$, B arbitrario, o $A = 1$, $B = 0$
(b) $A = -1$, B arbitrario, o $A = 1$, $B = 0$

29. todos enteros

31.



33. f^2, g^2, $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$ son pares
fg, f/g, g/f, $g \circ g$ son impares
$f + g$ no es ninguna de las dos cosas, a menos que, o bien $f(x) = 0$ o bien $g(x) = 0$.

Sección P.6 (página 52)

1. raíces -5 y -2; $(x + 5)(x + 2)$

3. raíces $-1 \pm i$; $(x + 1 - i)(x + 1 + i)$

5. raíces $1/2$ (doble) y $-1/2$ (doble); $(2x - 1)^2(2x + 1)^2$

7. raíces $-1, \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$; $(x+1)\left(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)$ $\left(x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)$

9. raíces 1 (triple) y -1 triple; $(x-1)^3(x+1)^3$

11. raíces -2, i, -1, $1+\sqrt{3}i$, $1-\sqrt{3}i$; $(x+2)(x-1)(x+i)(x-1-\sqrt{3}i)(x-1+\sqrt{3}i)$

13. $x + \dfrac{2x-1}{x^2-2}$ **15.** $x - 2 + \dfrac{7x+6}{x^2+2x+3}$

Sección P.7 (página 68)

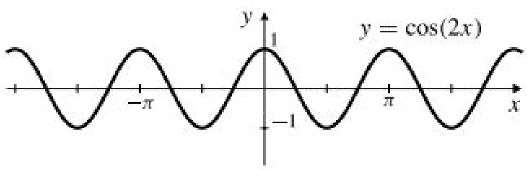
1. $-1/\sqrt{2}$ **3.** $\sqrt{3}/2$

5. $(\sqrt{3}-1)/(2\sqrt{2})$ **7.** $-\cos x$

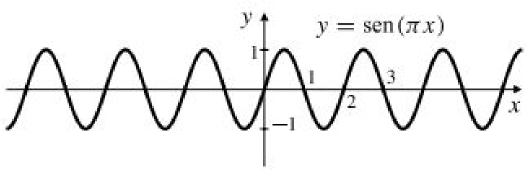
9. $-\cos x$ **11.** $1/(\operatorname{sen} x \cos x)$

17. $3 \operatorname{sen} x - 4 \operatorname{sen}^3 x$

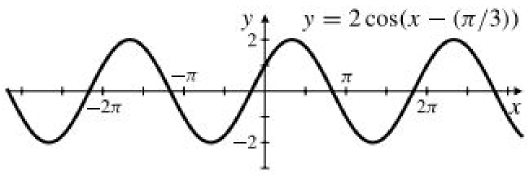
19. periodo π



21. periodo 2



23.



25. $\cos\theta = -4/5$, $\tan\theta = -3/4$

27. $\operatorname{sen}\theta = -2\sqrt{2}/3$, $\tan\theta = -2\sqrt{2}$

29. $\cos\theta = -\sqrt{3}/2$, $\tan\theta = 1/\sqrt{3}$

31. $a = 1$, $b = \sqrt{3}$ **33.** $b = 5/\sqrt{3}$, $c = 10/\sqrt{3}$

35. $a = b \tan A$ **37.** $a = b \cot B$

39. $c = b \sec A$ **41.** $\operatorname{sen} A = \sqrt{c^2 - b^2}/c$

43. $\operatorname{sen} B = 3/(4\sqrt{2})$ **45.** $\operatorname{sen} B = \sqrt{135}/16$

47. $6/(1+\sqrt{3})$

49. $b = 4 \operatorname{sen} 40^\circ / \operatorname{sen} 70^\circ \approx 2.736$

51. aprox. 16.98 m

Capítulo 1
Límites y continuidad

Sección 1.1 (página 76)

1. $((t+h)^2 - t^2)/h$ m/s **3.** 4 m/s

5. -3 m/s, 3 m/s, 0 m/s

7. a la izquierda, parado, a la derecha

9. peso 2, moviéndose hacia abajo

11. -1 ft/s, peso moviéndose hacia abajo

13. día 45

Sección 1.2 (página 84)

1. (a) 1, (b) 0, (c) 1 **3.** 1

5. 0 **7.** 1

9. 2/3 **11.** 0

13. 0 **15.** no existe

17. 1/6 **19.** 0

21. -1 **23.** no existe

25. 2 **27.** 3/8

29. $-1/2$ **31.** 8/3

33. 1/4 **35.** $1/\sqrt{2}$

37. $2x$ **39.** $-1/x^2$

41. $1/(2\sqrt{x})$ **43.** 1

45. 1/2 **47.** 1

49. 0 **51.** 2

53. no existe **55.** no existe

57. $-1/(2a)$ **59.** 0

61. -2 **63.** π^2

65. (a) 0, (b) 8, (c) 9, (d) -3

67. 5

69. 1

71. 0.7071

73. $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

75. 2

77. $x^{1/3} < x^3$ en $(-1, 0)$ y $(1, \infty)$,
$x^{1/3} > x^3$ en $(-\infty, -1)$ y $(0, 1)$,
$\lim_{x\to a} h(x) = a$ para $a = -1, 0$ y 1

Sección 1.3 (página 92)

1. 1/2

3. $-3/5$

5. 0

7. -3

9. $-2/\sqrt{3}$

11. no existe

13. $+\infty$

15. 0

17. $-\infty$

19. $-\infty$

21. ∞

23. $-\infty$

25. ∞

27. $-\sqrt{2}/4$

29. -2

31. -1

33. horiz.: $y = 0$, $y = -1$, vert.: $x = 0$

35. 1

37. 1

39. $-\infty$

41. 2

43. -1

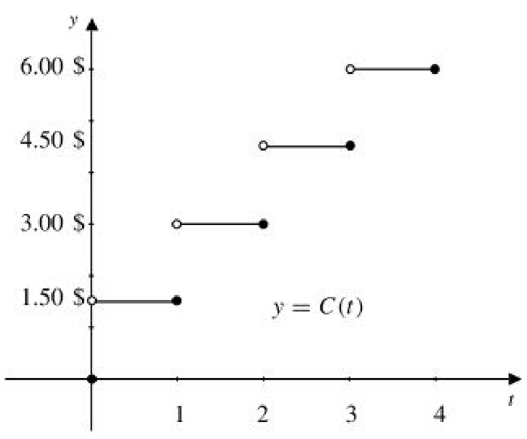
45. 1

47. 3

49. no existe

51. 1

53. $C(t)$ tiene límite en todo real t, excepto en los enteros.
$\lim_{t\to t_0-} C(t) = C(t_0)$ en todas partes, pero
$\lim_{t\to t_0+} C(t) = \begin{cases} C(t_0) & \text{si } t_0 \text{ no es integral} \\ C(t_0)+1.5 & \text{si } t_0 \text{ es entero} \end{cases}$



55. (a) B, (b) A, (c) A, (d) A

Sección 1.4 (página 103)

1. en -2, continua por la derecha, y cont. en -1 disc., en 0 disc. pero cont. por la izquierda, en 1 disc. y cont. por la derecha, en 2 disc.

3. no máx. abs., mín. abs. 0

5. no

7. cont. en todas partes

9. cont. en todas partes excepto en $x = 0$, disc. en $x = 0$

11. cont. en todas partes excepto en los enteros, discontinua pero continua por la izquierda en los enteros.

13. 4, $x + 2$

15. 1/5, $(t-2)/(t+2)$

17. $k = 8$

19. no máx, mín $= 0$

21. 16

23. 5

25. f positiva en $(-1, 0)$ y $(1, \infty)$; f negativa en $(-\infty, -1)$ y $(0, 1)$

27. f positiva en $(-\infty, -2)$, $(-1, 1)$ y $(2, \infty)$; f negativa en $(-2, -1)$ y $(1, 2)$

35. máx. 1.593 en -0.831, mín. 0.756 en 0.629

37. máx. $31/3 \approx 10.333$ en $x = 3$, mín. 4.762 en $x = 1.260$

39. 0.682

41. -0.6367326508, 1.409624004

Sección 1.5 (página 109)

1. entre 12 °C y 20 °C

3. (1.99, 2.01)

5. (0.81, 1.21)

7. $\delta = 0.01$

9. $\delta \approx 0.0165$

Ejercicios de repaso (página 111)

1. 13

3. 12

5. 4

7. no existe

9. no existe

11. $-\infty$

13. $12\sqrt{3}$

15. 0

17. no existe

19. $-1/3$

21. $-\infty$

23. ∞

25. no existe

27. 0

29. 2

31. no disc.

33. disc. y cont. por la izquierda en 2

35. disc. y cont. por la derecha en $x = 1$

37. no disc.

Problemas avanzados (página 111)

1. a la derecha **3.** $-1/4$

5. 3 **7.** V, F, V, F, F

Capítulo 2
Diferenciación

Sección 2.1 (página 119)

1. $y = 3x - 1$ **3.** $y = 8x - 13$

5. $y = 12x + 24$ **7.** $x - 4y = -5$

9. $x - 4y = -2$ **11.** $y = 2x_0x - x_0^2$

13. no **15.** sí, $x = -2$

17. sí, $x = 0$

19. (a) $3a^2$; (b) $y = 3x - 2$ e $y = 3x + 2$

21. $(1, 1), (-1, 1)$ **23.** $k = 3/4$

25. tangente horiz. en $(0, 0)$, $(3, 108)$, $(5, 0)$

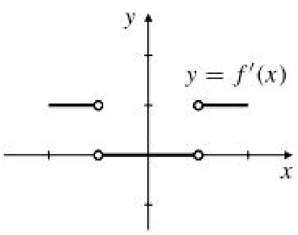
27. tangente horiz. en $(-0.5, 1.25)$, no tangentes en $(-1, 1)$ y $(1, -1)$

29. tangente horiz. en $(0, -1)$

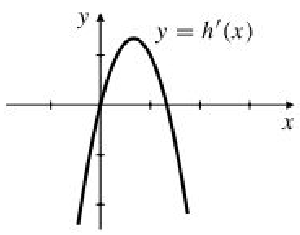
31. no, considere $y = x^{2/3}$ en $(0, 0)$

Sección 2.2 (página 128)

1.



3.



5. en $[-2, 2]$ excepto en $x = -1$ y $x = 1$

7. pendiente positiva para $x < 1.5$, negativa para $x > 1.5$; tangente horizontal en $x = 1.5$

9. puntos singulares en $x = -1, 0, 1$, tangentes horizontales alrededor de $x = \pm 0.57$

11. $2x - 3$ **13.** $3x^2$

15. $\dfrac{1}{\sqrt{2t+1}}$ **17.** $1 - \dfrac{1}{x^2}$

19. $-\dfrac{x}{(1+x^2)^{3/2}}$ **21.** $-\dfrac{1}{2(1+x)^{3/2}}$

23. Defina $f(0) = 0$, f no es diferenciable en 0

25. en $x = -1$ y $x = -2$

27.

x	$\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$
1.9	-0.26316
1.99	-0.25126
1.999	-0.25013
1.9999	-0.25001

x	$\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$
2.1	-0.23810
2.01	-0.24876
2.001	-0.24988
2.0001	-0.24999

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)\bigg|_{x=2} = -\frac{1}{4}$$

29. $x - 6y = -15$

31. $y = \dfrac{2}{a^2+a} - \dfrac{2(2a+1)}{(a^2+a)^2}(t-a)$

33. $22t^{21}$, todo t **35.** $-(1/3)x^{-4/3}$, $x \neq 0$

37. $(119/4)s^{115/4}$, $s \geqslant 0$ **39.** -16

41. $1/(8\sqrt{2})$ **43.** $y = a^2x - a^3 + \dfrac{1}{a}$

45. $y = 6x - 9$ e $y = -2x - 1$

47. $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ **51.** $f'(x) = \dfrac{1}{3}x^{-2/3}$

Sección 2.3 (página 137)

1. $6x - 5$ **3.** $2Ax + B$

5. $\dfrac{1}{3}s^4 - \dfrac{1}{5}s^2$

7. $\dfrac{1}{3}t^{-2/3} + \dfrac{1}{2}t^{-3/4} + \dfrac{3}{5}t^{-4/5}$

9. $x^{2/3} + x^{-8/5}$ **11.** $\dfrac{5}{2\sqrt{x}} - \dfrac{3}{2}\sqrt{x} - \dfrac{5}{6}x^{3/2}$

13. $-\dfrac{2x+5}{(x^2+5x)^2}$ **15.** $\dfrac{\pi^2}{(2-\pi t)^2}$

17. $(4x^2-3)/x^4$

19. $-t^{-3/2}+(1/2)t^{-1/2}+(3/2)\sqrt{t}$

21. $-\dfrac{24}{(3+4x)^2}$ **23.** $\dfrac{1}{\sqrt{t}\,(1-\sqrt{t})^2}$

25. $\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

27. $10+70x+150x^2+96x^3$

29. $2x(\sqrt{x}+1)(5x^{2/3}-2)+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(x^2+4)(5x^{2/3}-2)$
$+\dfrac{10}{3}x^{-1/3}(x^2+4)(\sqrt{x}+1)$

31. $\dfrac{6x+1}{(6x^2+2x+1)^2}$ **33.** -1

35. 20 **37.** $-\dfrac{1}{2}$

39. $-\dfrac{1}{18\sqrt{2}}$ **41.** $y=4x-6$

43. $(1, 2)$ y $(-1, -2)$ **45.** $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{4}{3}\right)$

47. $y=b-\dfrac{b^2x}{4}$

49. $y=12x-16$, $y=3x+2$

51. $x/\sqrt{x^2+1}$

Sección 2.4 (página 143)

1. $12(2x+3)^5$ **3.** $-20x(4-x^2)^9$

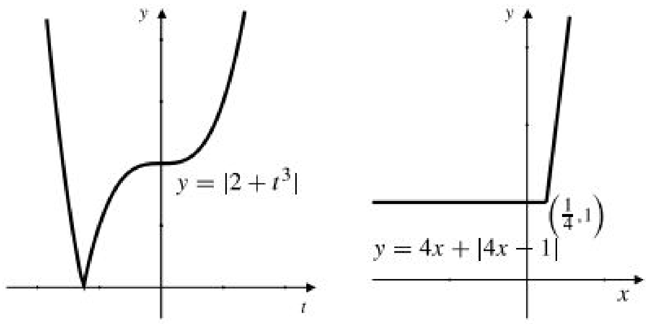
5. $\dfrac{30}{t^2}\left(2+\dfrac{3}{t}\right)^{-11}$ **7.** $\dfrac{12}{(5-4x)^2}$

9. $2x\,\mathrm{sgn}\,(1-x^2)$ **11.** $\begin{cases} 8 & \text{si } x>1/4 \\ 0 & \text{si } x<1/4 \end{cases}$

13. $\dfrac{-3}{2\sqrt{3x+4}(2+\sqrt{3x+4})^2}$

15. $-\dfrac{5}{3}\left(1-\dfrac{1}{(u-1)^2}\right)\left(u+\dfrac{1}{u-1}\right)^{-8/3}$

17.



23. $(5-2x)f'(5x-x^2)$ **25.** $\dfrac{f'(x)}{\sqrt{3+2f(x)}}$

27. $\dfrac{1}{\sqrt{x}}f'(3+2\sqrt{x})$

29. $15f'(4-5t)f'(2-3f(4-5t))$

31. $\dfrac{3}{2\sqrt{2}}$ **33.** 102

35. $-6\left(1-\dfrac{15}{2}(3x)^4((3x)^5-2)^{-3/2}\right)$
$\times\,(x+((3x)^5-2)^{-1/2})^{-7}$

37. $y=2^{3/2}-\sqrt{2}(x+1)$ **39.** $y=\dfrac{1}{27}+\dfrac{5}{162}(x+2)$

41. $\dfrac{x(x^4+2x^2-2)}{(x^2-1)^{5/2}}$ **43.** 857,592

45. no; sí; ambas funciones son iguales a x^2

Sección 2.5 (página 150)

3. $-3\,\mathrm{sen}\,3x$ **5.** $\pi\sec^2\pi x$

7. $3\csc^2(4-3x)$ **9.** $r\,\mathrm{sen}\,(s-rx)$

11. $2\pi x\cos(\pi x^2)$ **13.** $\dfrac{-\mathrm{sen}\,x}{2\sqrt{1+\cos x}}$

15. $-(1+\cos x)\,\mathrm{sen}\,(x+\mathrm{sen}\,x)$

17. $(3\pi/2)\,\mathrm{sen}^2(\pi x/2)\cos(\pi x/2)$

19. $a\cos 2at$ **21.** $2\cos(2x)+2\,\mathrm{sen}\,(2x)$

23. $\sec^2 x-\csc^2 x$ **25.** $\tan^2 x$

27. $-t\,\mathrm{sen}\,t$ **29.** $1/(1+\cos x)$

31. $2x\cos(3x)-3x^2\,\mathrm{sen}\,(3x)$

33. $2x[\sec(x^2)\tan^2(x^2)+\sec^3(x^2)]$

35. $-\sec^2 t \operatorname{sen}(\tan t)\cos(\cos(\tan t))$

39. $y = \pi - x$, $y = x - \pi$

41. $y = 1 - (x - \pi)/4$, $y = 1 + 4(x - \pi)$

43. $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{\pi}{180\sqrt{2}}(x - 45)$

45. $\pm(\pi/4, 1)$ **49.** sí, (π, π)

51. sí, $(2\pi/3, (2\pi/3) + \sqrt{3})$, $(4\pi/3, (4\pi/3) - \sqrt{3})$

53. 2 **55.** 1

57. 1/2

59. un número infinito, 0.336508, 0.161228

Sección 2.6 (página 158)

1. $c = \dfrac{a+b}{2}$ **3.** $c = \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

9. crec. en $\left(-\infty, -\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$ y $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}, \infty\right)$, decr. en $\left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}}, \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$

11. crec. en $(-2, 0)$ y $(2, \infty)$; decr. en $(-\infty, -2)$ y $(0, 2)$

13. crec. en $(-\infty, 3)$ y $(5, \infty)$; decr. en $(3, 5)$

15. crec. en $(-\infty, \infty)$

17. Las dos aplicaciones separadas del TVM no deben dar el mismo valor de c.

Sección 2.7 (página 164)

1. 4% **3.** -4%

5. 1% **7.** 6%

9. 8 ft^2/ft

11. $1/\sqrt{\pi A}$ unidades/unidad al cuadrado

13. 16π m^3/m

15. $\dfrac{dC}{dA} = \sqrt{\dfrac{\pi}{A}}$ unidades de longitud/unidad de área

17. PC. $x = 0$, crec. $x > 0$, decr. $x < 0$

19. PC. $x = 0$, $x = -4$, crec. en $(-\infty, -4)$ y $(0, \infty)$, decr. en $(-4, 0)$

23. 0.535898, 7.464102 **25.** 0, -0.518784

27. (a) 10,500 L/min, 3,500 L/min, (b) 7,000 L/min

29. decrece a 1/8 libras/min

31. (a) 300 \$, (b) $C(101) - C(100) = 299.50$ \$

33. (a) -2.00 \$, (b) 9.11 \$

Sección 2.8 (página 168)

1. $\begin{cases} y' = -14(3-2x)^6 \\ y'' = 168(3-2x)^5 \\ y''' = -1680(3-2x)^4 \end{cases}$

3. $\begin{cases} y' = -12(x-1)^{-3} \\ y'' = 36(x-1)^{-4} \\ y''' = -144(x-1)^{-5} \end{cases}$

5. $\begin{cases} y' = \dfrac{1}{3}x^{-2/3} + \dfrac{1}{3}x^{-4/3} \\ y'' = -\dfrac{2}{9}x^{-5/3} - \dfrac{4}{9}x^{-7/3} \\ y''' = \dfrac{10}{27}x^{-8/3} + \dfrac{28}{27}x^{-10/3} \end{cases}$

7. $\begin{cases} y' = \dfrac{5}{2}x^{3/2} + \dfrac{3}{2}x^{-1/2} \\ y'' = \dfrac{15}{4}x^{1/2} - \dfrac{3}{4}x^{-3/2} \\ y''' = \dfrac{15}{8}x^{-1/2} + \dfrac{9}{8}x^{-5/2} \end{cases}$

9. $y' = \sec^2 x$, $y'' = 2\sec^2 x \tan x$, $y''' = 4\sec^2 x \tan^2 x + 2\sec^4 x$

11. $y' = -2x\operatorname{sen}(x^2)$, $y'' = -2\operatorname{sen}(x^2) - 4x^2\cos(x^2)$, $y''' = -12x\cos(x^2) + 8x^3\operatorname{sen}(x^2)$

13. $(-1)^n n! x^{-(n+1)}$ **15.** $n!(2-x)^{-(n+1)}$

17. $(-1)^n n! b^n (a+bx)^{-(n+1)}$

19. $f^{(n)} = \begin{cases} (-1)^k a^n \cos(ax) & \text{si } n = 2k \\ (-1)^{k+1} a^n \operatorname{sen}(ax) & \text{si } n = 2k+1 \end{cases}$ con $k = 0, 1, 2, \ldots$

21. $f^{(n)} = (-1)^k[a^n x \operatorname{sen}(ax) - na^{n-1}\cos(ax)]$ si $n = 2k$, o $(-1)^k[a^n x\cos(ax) + na^{n-1}\operatorname{sen}(ax)]$ si $n = 2k+1$, con $k = 0, 1, 2, \ldots$

23. $-\dfrac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-3)}{2^n}3^n(1-3x)^{-(2n-1)/2}$, $(n = 2, 3, \ldots)$

31. Si $f^{(n)}$ existe en un intervalo I y f se anula $n+1$ puntos distintos de I entonces $f^{(n)}$ se anula en al menos un punto de I.

Sección 2.9 (página 175)

1. $\dfrac{1-y}{2+x}$ **3.** $\dfrac{2x+y}{3y^2-x}$

5. $\dfrac{2-2xy^3}{3x^2y^2+1}$ **7.** $-\dfrac{3x^2+2xy}{x^2+4y}$

9. $2x+3y=5$ **11.** $y=x$

13. $y=1-\dfrac{4}{4-\pi}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

15. $y=2-x$ **17.** $\dfrac{2(y-1)}{(1-x)^2}$

19. $\dfrac{(2-6y)(1-3x^2)^2}{(3y^2-2y)^3}-\dfrac{6x}{3y^2-2y}$

21. $-a^2/y^3$ **23.** 0

25. -26

Sección 2.10 (página 181)

1. $5x+C$ **3.** $\dfrac{2}{3}x^{3/2}+C$

5. $\dfrac{1}{4}x^4+C$ **7.** $-\cos x+C$

9. $a^2x-\dfrac{1}{3}x^3+C$ **11.** $\dfrac{4}{3}x^{3/2}+\dfrac{9}{4}x^{4/3}+C$

13. $\dfrac{1}{12}x^4-\dfrac{1}{6}x^3+\dfrac{1}{2}x^2-x+C$

15. $\dfrac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)+C$ **17.** $\dfrac{-1}{1+x}+C$

19. $\dfrac{1}{3}(2x+3)^{3/2}+C$ **21.** $-\cos(x^2)+C$

23. $\tan x-x+C$ **25.** $(x+\operatorname{sen}x\cos x)/2+C$

27. $y=\dfrac{1}{2}x^2-2x+3$, todo x

29. $y=2x^{3/2}-15$, $(x>0)$

31. $y=\dfrac{A}{3}(x^3-1)+\dfrac{B}{2}(x^2-1)+C(x-1)+1$, (todo x)

33. $y=\operatorname{sen}x+(3/2)$, (todo x)

35. $y=1+\tan x$, $-\pi/2<x<\pi/2$

37. $y=x^2+5x-3$, (todo x)

39. $y=\dfrac{x^5}{20}-\dfrac{x^2}{2}+8$, (todo x)

41. $y=1+x-\cos x$, (todo x)

43. $y=3x-\dfrac{1}{x}$, $(x>0)$

45. $y=-\dfrac{7\sqrt{x}}{2}+\dfrac{18}{\sqrt{x}}$, $(x>0)$

Sección 2.11 (página 187)

1. (a) $t>2$, (b) $t<2$, (c) todo t, (d) ningún t, (e) $t>2$, (f) $t<2$, (g) 2, (h) 0

3. (a) $t<-2/\sqrt{3}$ o $t>2/\sqrt{3}$,
(b) $-2/\sqrt{3}<t<2/\sqrt{3}$, (c) $t>0$, (d) $t<0$,
(e) $t>2/\sqrt{3}$ o $-2/\sqrt{3}<t<0$,
(f) $t<-2/\sqrt{3}$ o $0<t<2/\sqrt{3}$,
(g) $\pm 12/\sqrt{3}$ a $t=\pm 2/\sqrt{3}$, (h) 12

5. acel. $=9.8$ m/s^2 hacia abajo todas las veces; altura máxima $=4.9$ m; la bola llega al suelo a 9.8 m/s

7. tiempo 27.8 s; distancia 771.6 m

9. $4h$ m, $\sqrt{2}v_0$ m/s **11.** 400 pies

13. 0.833 km

15. $v=\begin{cases}2t & \text{si } 0<t\leqslant 2\\ 4 & \text{si } 2<t<8\\ 20-2t & \text{si } 8\leqslant t<10\end{cases}$

v es continua para $0<t<10$.

$a=\begin{cases}2 & \text{si } 0<t<2\\ 0 & \text{si } 2<t<8\\ -2 & \text{si } 8<t<10\end{cases}$

a es continua excepto en $t=2$ y $t=8$.
La velocidad máxima 4 se alcanza para $2\leqslant t\leqslant 8$.

17. 7 s **19.** 448 pies

Ejercicios de repaso (página 189)

1. $18x + 6$ **3.** -1

5. $6\pi x + 12y = 6\sqrt{3} + \pi$

7. $\dfrac{\cos x - 1}{(x - \operatorname{sen} x)^2}$ **9.** $x^{-3/5}(4 - x^{2/5})^{-7/2}$

11. $-2\theta \sec^2 \theta \tan \theta$ **13.** $20x^{19}$

15. $-\sqrt{3}$ **17.** $-2xf'(3 - x^2)$

19. $2f'(2x)\sqrt{g(x/2)} + \dfrac{f(2x)g'(x/2)}{4\sqrt{g(x/2)}}$

21. $f'(x + (g(x))^2)(1 + 2g(x)g'(x))$

23. $\cos x f'(\operatorname{sen} x)g(\cos x) - \operatorname{sen} x f(\operatorname{sen} x)g'(\cos x)$

25. $7x + 10y = 24$ **27.** $\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{1}{x} + C$

29. $2\tan x + 3\sec x + C$ **31.** $4x^3 + 3x^4 - 7$

33. $I_1 = x\operatorname{sen} x + \cos x + C$, $I_2 = \operatorname{sen} x - x\cos x + C$

35. $y = 3x$

37. puntos $k\pi$ y $k\pi/(n + 1)$ siendo k cualquier entero

39. $(0, 0)$, $(\pm 1/\sqrt{2}, 1/2)$, dist. $= \sqrt{3}/2$ unidades

41. (a) $k = g/R$ **43.** 15.3 m

45. 80 pies/s o aproximadamente 55 mph

Problemas avanzados (página 190)

3. (a) 0, (b) 3/8, (c) 12, (d) -48, (e) 3/7, (f) 21

13. $f(m) = C - (m - B)^2/(4A)$

17. (a) $3b^2 > 8ac$

19. (a) 3 s, (b) $t = 7$ s, (c) $t = 12$ s, (d) aproximadamente 13.07 m/s^2, (e) 197.5 m, (f) 60.3 m

Capítulo 3
Funciones trascendentes

Sección 3.1 (página 199)

1. $f^{-1}(x) = x + 1$
$\mathcal{D}(f^{-1}) = \mathcal{R}(f) = \mathcal{R}(f^{-1}) = \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$

3. $f^{-1}(x) = x^2 + 1$, $\mathcal{D}(f^{-1}) = \mathcal{R}(f) = [0, \infty)$,
$\mathcal{R}(f^{-1}) = \mathcal{D}(f) = [1, \infty)$

5. $f^{-1}(x) = x^{1/3}$
$\mathcal{D}(f^{-1}) = \mathcal{R}(f) = \mathcal{R}(f^{-1}) = \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$

7. $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$, $\mathcal{D}(f^{-1}) = \mathcal{R}(f) = [0, \infty)$,
$\mathcal{R}(f^{-1}) = \mathcal{D}(f) = (-\infty, 0]$

9. $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x} - 1$, $\mathcal{D}(f^{-1}) = \mathcal{R}(f) = \{x : x \neq 0\}$,
$\mathcal{R}(f^{-1}) = \mathcal{D}(f) = \{x : x \neq -1\}$

11. $f^{-1}(x) = \dfrac{1 - x}{2 + x}$,
$\mathcal{D}(f^{-1}) = \mathcal{R}(f) = \{x : x \neq -2\}$,
$\mathcal{R}(f^{-1}) = \mathcal{D}(f) = \{x : x \neq -1\}$

13. $g^{-1}(x) = f^{-1}(x + 2)$ **15.** $k^{-1}(x) = f^{-1}\left(-\dfrac{x}{3}\right)$

17. $p^{-1}(x) = f^{-1}\left(\dfrac{1}{x} - 1\right)$

19. $r^{-1}(x) = \dfrac{1}{4}\left(3 - f^{-1}\left(\dfrac{1 - x}{2}\right)\right)$

21. $f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x - 1} & \text{si } x >= 1 \\ x - 1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

23. $h^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x - 1} & \text{si } x \geqslant 1 \\ \sqrt{1 - x} & \text{si } x < 1 \end{cases}$

25. $g^{-1}(1) = 2$ **29.** $(f^{-1})'(2) = 1/4$

31. 2.23362 **33.** $\mathbb{R}$, 1

35. $c = 1$, a, b arbitrario, o $a = b = 0$, $c = -1$

37. no

Sección 3.2 (página 204)

1. $\sqrt{3}$ **3.** x^6

5. 3 **7.** $-2x$

9. x **11.** 1

13. 1 **15.** 2

17. $\log_a(x^4 + 4x^2 + 3)$ **19.** 4.728804...

21. $x = (\log_{10}5)/(\log_{10}(4/5)) \approx -7.212567$

23. $x = 3^{1/5} = 10^{(\log_{10}3)/5} \approx 1.24573$

29. 1/2 **31.** 0

33. ∞

Sección 3.3 (página 214)

1. $\sqrt{e}$

3. x^5

5. $-3x$

7. $\ln \dfrac{64}{81}$

9. $\ln(x^2(x-2)^5)$

11. $x = \dfrac{\ln 2}{\ln(3/2)}$

13. $x = \dfrac{\ln 5 - 9\ln 2}{2\ln 2}$

15. $0 < x < 2$

17. $3 < x < 7/2$

19. $5e^{5x}$

21. $(1-2x)e^{-2x}$

23. $\dfrac{3}{3x-2}$

25. $\dfrac{e^x}{1+e^x}$

27. $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

29. e^{x+e^x}

31. $e^x(\operatorname{sen} x - \cos x)$

33. $\dfrac{1}{x\ln x}$

35. $2x\ln x$

37. $(2\ln 5)5^{2x+1}$

39. $t^x x^t \ln t + t^{x+1}x^{t-1}$

41. $\dfrac{b}{(bs+c)\ln a}$

43. $x^{\sqrt{x}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\left(\dfrac{1}{2}\ln x + 1\right)\right)$

45. $\sec x$

47. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$

49. $f^{(n)}(x) = e^{ax}(na^{n-1} + a^n x)$, $\quad n = 1, 2, 3, \ldots$

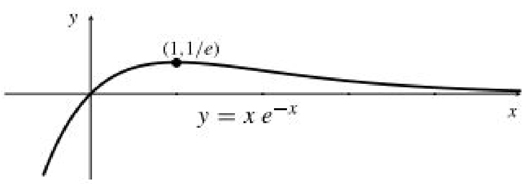
51. $y' = 2xe^{x^2}$, $\; y'' = 2(1+2x^2)e^{x^2}$,
$y''' = 4(3x+2x^3)e^{x^2}$, $\; y^{(4)} = 4(3+12x^2+4x^4)e^{x^2}$

53. $f'(x) = x^{x^2+1}(2\ln x + 1)$,
$g'(x) = x^{x^x}x^x\left(\ln x + (\ln x)^2 + \dfrac{1}{x}\right)$;
g crece más rápidamente que f.

55. $f'(x) = f(x)\left(\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x-3} + \dfrac{1}{x-4}\right)$

57. $f'(2) = \dfrac{526}{3675}$, $\; f'(1) = \dfrac{1}{6}$

59. f crec. para $x < 1$, decr. para $x > 1$



61. $y = ex$

63. $y = 2e\ln 2(x-1)$

65. $-1/e^2$

67. $f'(x) = (A+B)\cos\ln x + (B-A)\operatorname{sen}\ln x$,
$\int \cos\ln x\,dx = \dfrac{x}{2}(\cos\ln x + \operatorname{sen}\ln x)$,
$\int \operatorname{sen}\ln x\,dx = \dfrac{x}{2}(\operatorname{sen}\ln x - \cos\ln x)$

69. (a) $F_{2B,\,-2A}(x)$; (b) $-2e^x(\cos x + \operatorname{sen} x)$

Sección 3.4 (página 223)

1. 0

3. 2

5. 0

7. 0

9. 566

11. 29.15 años

13. 160.85 años

15. 4139 g

17. 7557.84 $

19. aproximadamente 14.7 años

21. aproximadamente 142

23. (a) $f(x) = Ce^{bx} - (a/b)$,
(b) $y = (y_0 + (a/b))e^{bx} - (a/b)$

25. 22.35 °C

27. 6.84 min

31. $(0, -(1/k)\ln(y_0/(y_0 - L)))$, solución $\to -\infty$

33. aproximadamente 7671 casos, creciendo aproximadamente a 3028 casos/semana

Sección 3.5 (página 234)

1. $\pi/3$

3. $-\pi/4$

5. 0.7

7. $-\pi/3$

9. $\dfrac{\pi}{2} + 0.2$

11. $2/\sqrt{5}$

13. $\sqrt{1-x^2}$

15. $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

17. $\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

19. $\dfrac{1}{\sqrt{2+x-x^2}}$

21. $\dfrac{-\operatorname{sgn} a}{\sqrt{a^2-(x-b)^2}}$

23. $\tan^{-1}t + \dfrac{t}{1+t^2}$

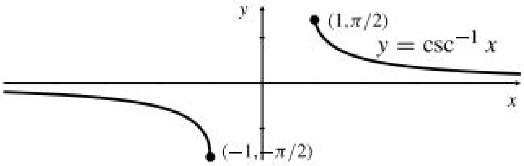
25. $2x\tan^{-1}x + 1$

27. $\dfrac{\sqrt{1-4x^2}\operatorname{sen}^{-1}2x - 2\sqrt{1-x^2}\operatorname{sen}^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-4x^2}(\operatorname{sen}^{-1}2x)^2}$

29. $\dfrac{x}{\sqrt{(1-x^4)\,\mathrm{sen}^{-1}x^2}}$ **31.** $\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}$

33. $\dfrac{\pi-2}{\pi-1}$

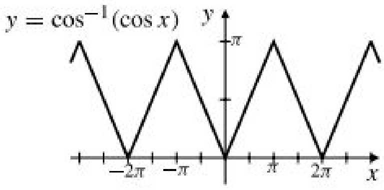
37. $\dfrac{d}{dx}\csc^{-1}x = -\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

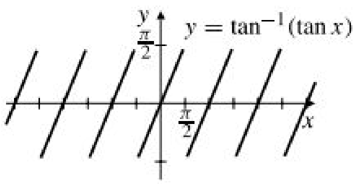


39. $\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = -\dfrac{\pi}{2}$ para $x < 0$

41. continua en todas partes, diferenciable excepto en $n\pi$ para enteros n

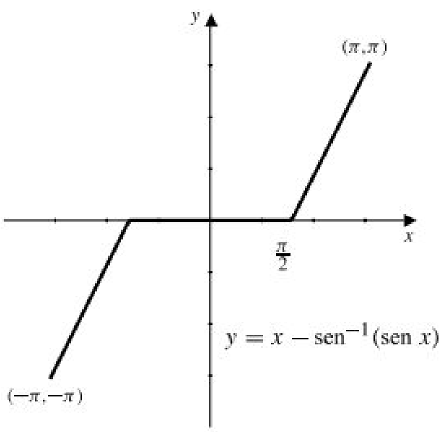
43. continua y diferenciable en todas partes excepto en múltiplos impares de $\pi/2$.





49. $\tan^{-1}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) - \tan^{-1}x = \dfrac{3\pi}{4}$ en $(-\infty, -1)$

51. $f'(x) = 1 - \mathrm{sgn}(\cos x)$



53. $y = \dfrac{1}{3}\tan^{-1}\dfrac{x}{3} + 2 - \dfrac{\pi}{12}$

55. $y = 4\,\mathrm{sen}^{-1}\dfrac{x}{5}$

Sección 3.6 (página 240)

3. $\tanh(x+y) = \dfrac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$

$\tanh(x-y) = \dfrac{\tanh x - \tanh y}{1 - \tanh x \tanh y}$

5. $\dfrac{d}{dx}\,\mathrm{senh}^{-1}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$,

$\dfrac{d}{dx}\cosh^{-1}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$,

$\dfrac{d}{dx}\tanh^{-1}(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$,

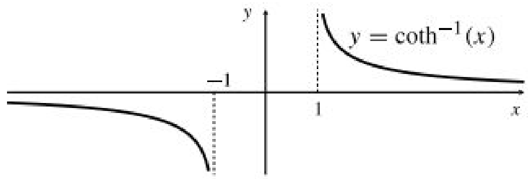
$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \mathrm{senh}^{-1}(x) + C,$

$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \cosh^{-1}(x) + C \quad (x > 1),$

$\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^2} = \tanh^{-1}(x) + C \quad (-1 < x < 1)$

7. (a) $\dfrac{x^2-1}{2x}$; (b) $\dfrac{x^2+1}{2x}$; (c) $\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$; (d) x^2

9. $\coth^{-1}x = \tanh^{-1}\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$, dominio: todo x tal que $|x| > 1$, rango: todo $y \neq 0$, derivada: $-1/(x^2-1)$



11. $f_{A,B} = g_{A+B,A-B}$; $g_{C,D} = f_{(C+D)/2,(C-D)/2}$

13. $y = y_0\cosh k(x-a) + \dfrac{v_0}{k}\,\mathrm{senh}\,k(x-a)$

Sección 3.7 (página 247)

1. $y = Ae^{-5t} + Be^{-2t}$ **3.** $y = A + Be^{-2t}$

5. $y = (A + Bt)e^{-4t}$

7. $y = (A\cos t + B\,\mathrm{sen}\,t)e^{3t}$

9. $y = (A\cos 2t + B\,\mathrm{sen}\,2t)e^{-t}$

11. $y = (A\cos\sqrt{2}t + B\,\mathrm{sen}\,\sqrt{2}t)e^{-t}$

13. $y = \dfrac{6}{7}e^{t/2} + \dfrac{1}{7}e^{-3t}$

15. $y = e^{-2t}(2\cos t + 6\,\mathrm{sen}\,t)$

25. $y = \dfrac{3}{10}\mathrm{sen}\,(10t)$, frec. circ. 10, frec. $\dfrac{10}{2\pi}$, per $\dfrac{2\pi}{10}$, amp $\dfrac{3}{10}$

33. $y = e^{3-t}[2\cos(2(t-3)) + \mathrm{sen}\,(2(t-3))]$

35. $y = \dfrac{c}{k^2}(1 - \cos(kx) + a\cos(kx) + \dfrac{b}{k}\mathrm{sen}\,(kx)$

Ejercicios de repaso (página 249)

1. 1/3 **3.** ambos límites son 0

5. máx. $1/\sqrt{2e}$, mín. $-1/\sqrt{2e}$

7. $f(x) = 3e^{(x^2/2)-2}$

9. (a) aproximadamente 13.863%, (b) aproximadamente 68 días

11. e^{2x} **13.** $y = x$

15. 13.8165% aprox.

17. $\cos^{-1}x = \dfrac{\pi}{2} - \mathrm{sen}^{-1}x$, $\cot^{-1}x = $
$= \mathrm{sgn}\,x\,\mathrm{sen}^{-1}(1/\sqrt{x^2+1})$, $\csc^{-1}x = \mathrm{sen}^{-1}(1/x)$

19. 15 °C

Capítulo 4
Algunas aplicaciones de las derivadas

Sección 4.1 (página 257)

1. 32 cm^2/min

3. creciendo a 160π cm^2/s

5. (a) $1/(6\pi r)$ km/h, (b) $1/(6\sqrt{\pi A})$ km/h

7. $1/(180\pi)$ cm/s **9.** 2 cm^2/s

11. creciendo a 2 cm^3/s

13. creciendo con velocidad 12

15. creciendo con velocidad $2/\sqrt{5}$

17. $45\sqrt{3}$ km/h **19.** 1/3 m/s, 5/6 m/s

21. 100 tons/día

23. $16\dfrac{4}{11}$ min después de 3:00

25. $1/(18\pi)$ m/min

27. $9(6250\pi)$ m/min, 4.64 m

29. 8 m/min **31.** decr. a 126.9 km/h

33. 1/8 unidades/s **35.** $\sqrt{3}/16$ m/min

37. (a) hacia abajo a 24/125 m/s, (b) a la derecha a 7/125 m/s

39. decr. a 0.0197 rad/s **41.** 0.047 rad/s

Sección 4.2 (página 268)

1. mín. abs. 1 en $x = -1$; máx. abs. 3 en $x = 1$

3. mín. abs. 1 en $x = -1$; no máx.

5. mín. abs. -1 en $x = 0$; máx. abs. 8 en $x = 3$; máx. loc. 3 en $x = -2$

7. mín. abs. $a^3 + a - 4$ en $x = a$; máx. abs. $b^3 + b - 4$ en $x = b$

9. máx. abs. $b^5 + b^3 + 2b$ en $x = b$; no valor mínimo

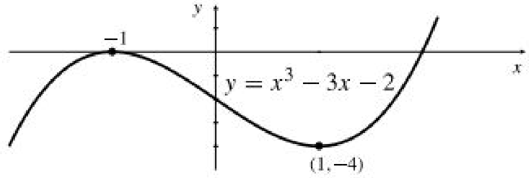
11. no valores máx. ni mín.

13. máx. 3 en $x = -2$, mín. 0 en $x = 1$

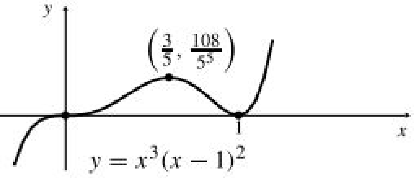
15. máx. abs. 1 en $x = 0$; no valor mínimo

17. no valores máx. ni mín.

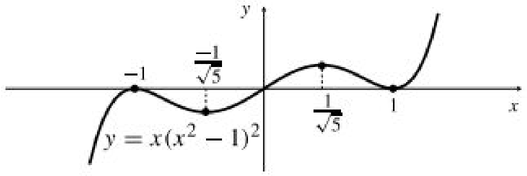
19. máx. loc. en $x = -1$; mín. loc. en $x = 1$



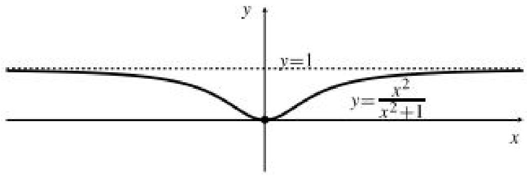
21. máx. loc. en $x = \frac{3}{5}$; mín. loc. en $x = 1$; el punto crítico $x = 0$ no es máximo ni mínimo



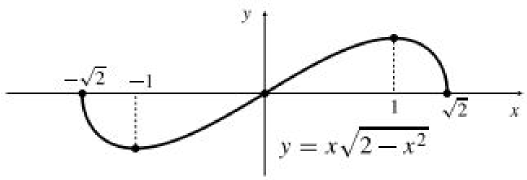
23. máx. loc. en $x = -1$ y $x = 1/\sqrt{5}$; mín. loc. en $x = 1$ y $x = -1/\sqrt{5}$



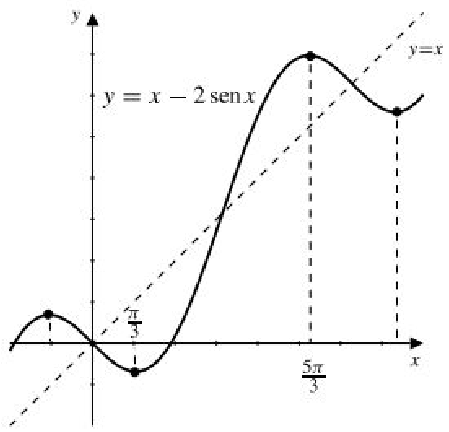
25. mín. abs. en $x = 0$



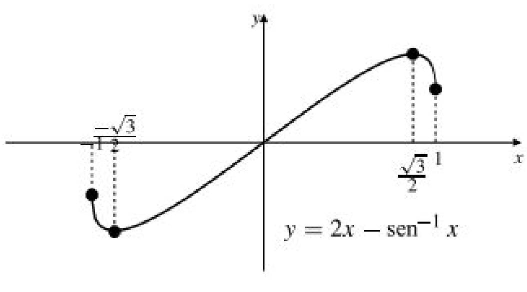
27. mín. loc. a PC $x = -1$ y PS extremo $x = \sqrt{2}$; máx. loc. en PC $x = 1$ y PS extremo $x = -\sqrt{2}$



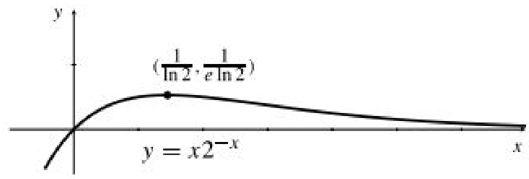
29. máx. loc. en $x = 2n\pi - \dfrac{\pi}{3}$; mín. loc. en $x = 2n\pi + \dfrac{\pi}{3}$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$



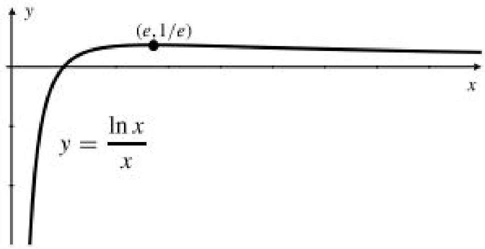
31. máx. loc. en PC $x = \sqrt{3}/2$ y PS extremo $x = -1$; mín. loc. en PC $x = -\sqrt{3}/2$ y PS extremo $x = 1$



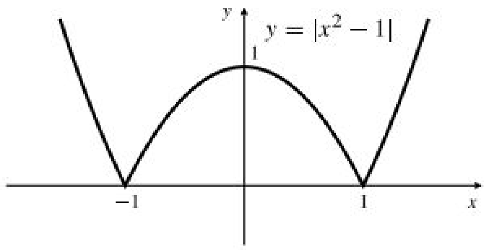
33. máx. abs. en $x = 1/\ln 2$



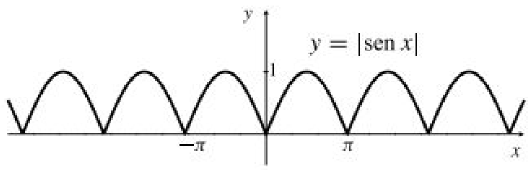
35. máx. abs. en $x = e$



37. máx. loc. en PC $x = 0$; mín. abs. en PS $x = \pm 1$



39. máx. abs. en PC $x = (2n+1)\pi/2$; mín. abs. en PS $x = n\pi$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$



41. no máx. ni mín.

43. máx. 2, mín. -2

45. tiene mín., no máx.

47. sí, no

Sección 4.3 (página 273)

1. cońcava en $(0, \infty)$

3. convexa en $\mathbb{R}$

5. cóncava en $(-1, 0)$ y $(1, \infty)$; convexa en $(-\infty, -1)$ y $(0, 1)$; inflexión $x = -1, 0, 1$

7. cóncava en $(-1, 1)$; convexa en $(-\infty, -1)$ y $(1, \infty)$; inflexión $x = \pm 1$

9. cóncava en $(-2, -2/\sqrt{5})$ y $(2/\sqrt{5}, 2)$; convexa en $(-\infty, -2)$, $(-2/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$ y $(2, \infty)$; inflexión $x = \pm 2, \pm 2/\sqrt{5}$

11. cóncava en $(2n\pi, (2n+1)\pi)$; convexa en $((2n-1)\pi, 2n\pi)$, $(n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$; inflexión $x = n\pi$

13. cóncava en $(n\pi, (n+\frac{1}{2})\pi)$; convexa en $((n-\frac{1}{2})\pi, n\pi)$; inflexión $x = n\pi/2$, $(n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$

15. cóncava en $(0, \infty)$, convexa en $(-\infty, 0)$; inflexión $x = 0$

17. cóncava en $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, convexa en $(-\infty, -1/\sqrt{2})$ y $(1/\sqrt{2}, \infty)$; inflexión $x = \pm 1/\sqrt{2}$

19. cóncava en $(-\infty, -1)$ y $(1, \infty)$; convexa en $(-1, 1)$; inflexión $x = \pm 1$

21. cóncava en $(-\infty, 4)$, convexa en $(4, \infty)$; inflexión $x = 4$

23. no concavidad, no inflexiones

25. mín. loc. en $x = 2$; máx. loc. en $x = \frac{2}{3}$

27. mín. loc. en $x = 1/\sqrt[4]{3}$; máx. loc. en $-1/\sqrt[4]{3}$

29. máx. loc. en $x = 1$; mín. loc. en $x = -1$ ambos abs.

31. loc. (y abs.) mín. en $x = 1/e$

33. mín. loc. en $x = 0$; inflexiones en $x = \pm 2$ (no discernible para el Test de la Segunda Derivada)

35. mín. abs. en $x = 0$; máx. abs. en $x = \pm 1/\sqrt{2}$

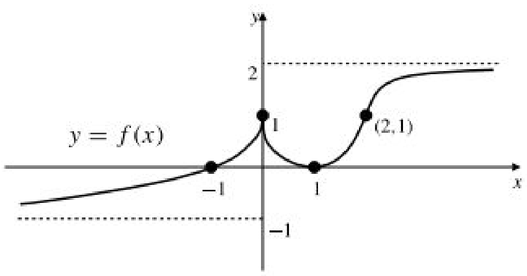
39. Si n es par, f_n tiene un mínimo y g_n tiene un máximo en $x = 0$. Si n es impar ambas tienen inflexiones en $x = 0$.

Sección 4.4 (página 283)

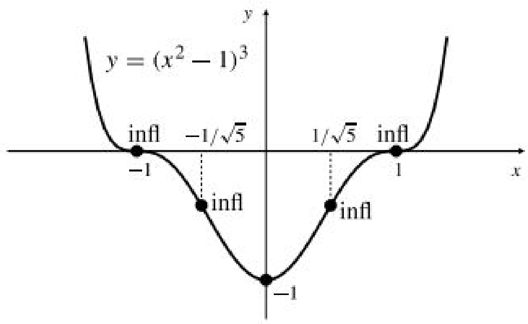
1. (a) g, (*b*) f', (c) f, (d) f'

3. (a) $k(x)$, (b) $g(x)$, (c) $f(x)$, (d) $h(x)$

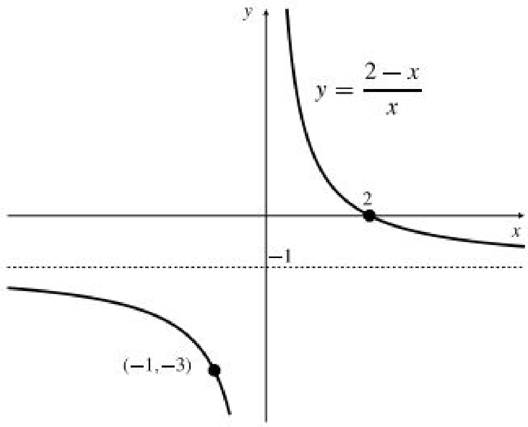
5.



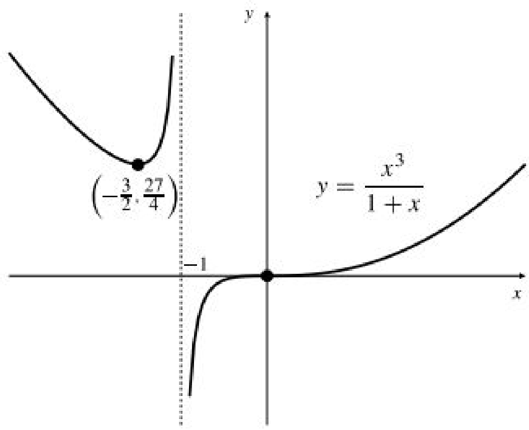
7.



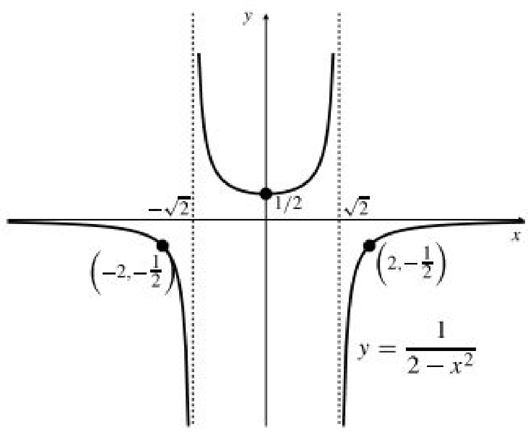
9.



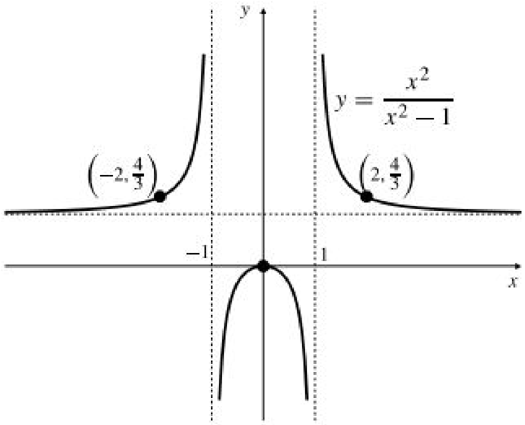
11.



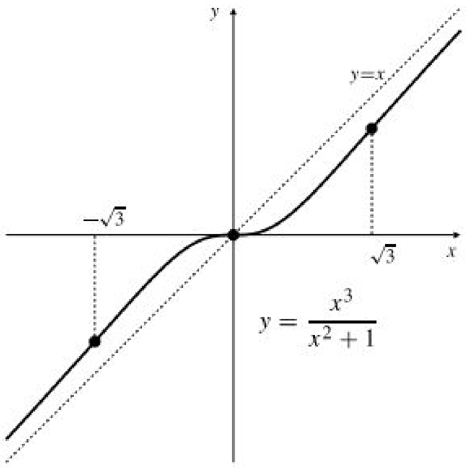
13.



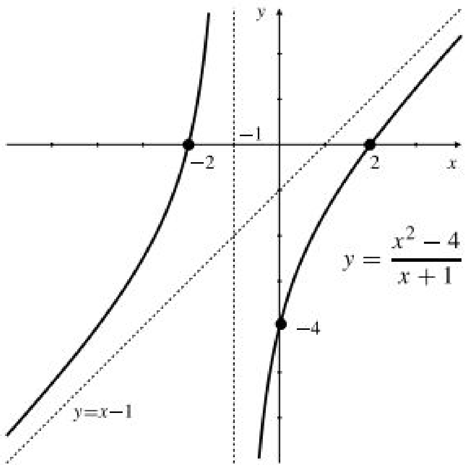
15.



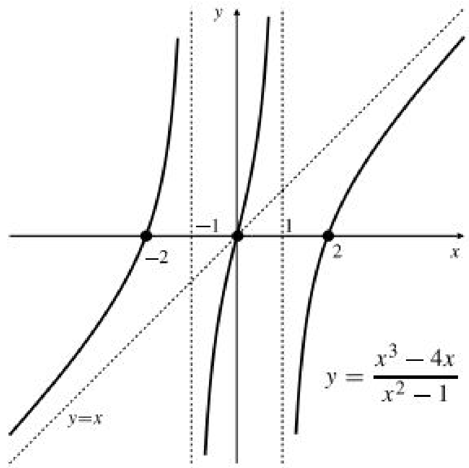
17.



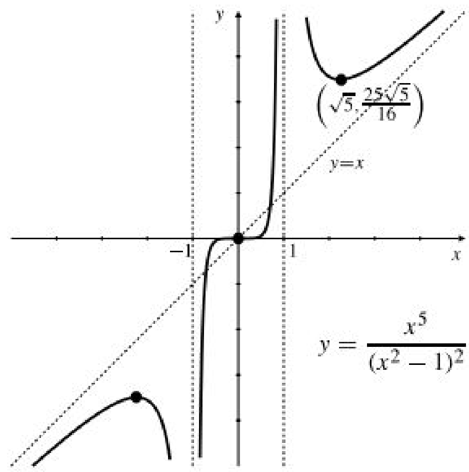
19.



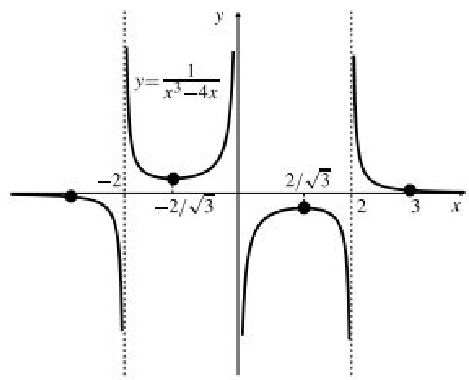
21.



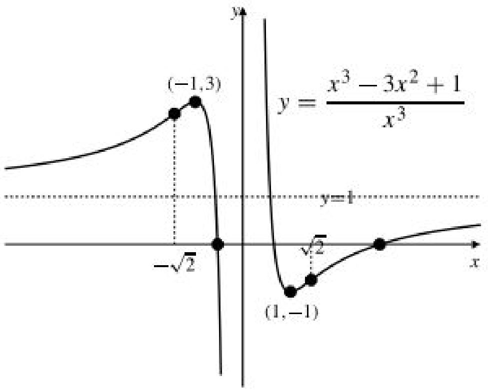
23.



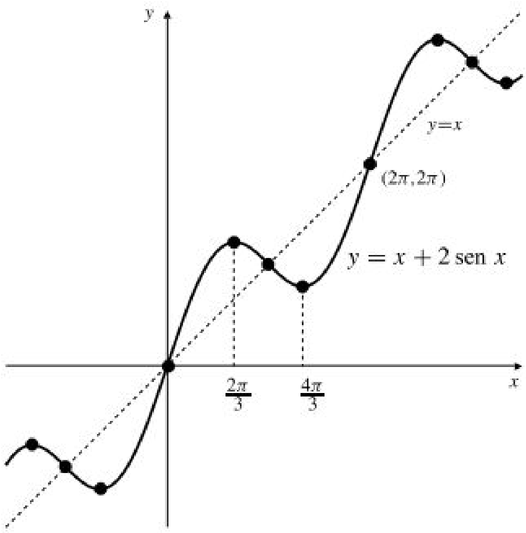
25.



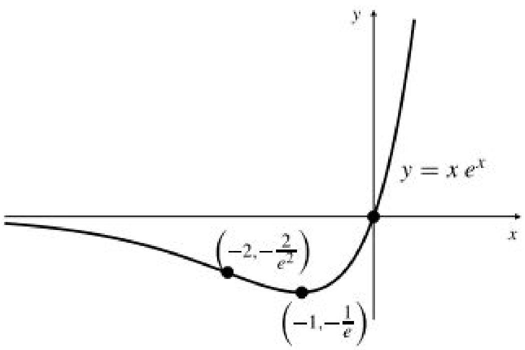
27.



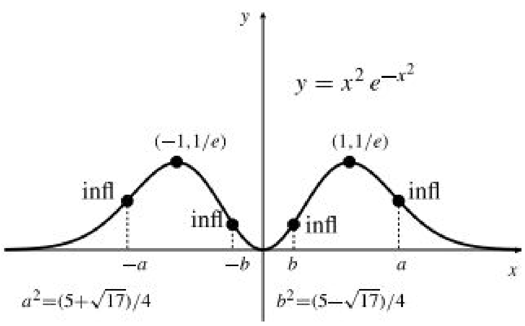
29.



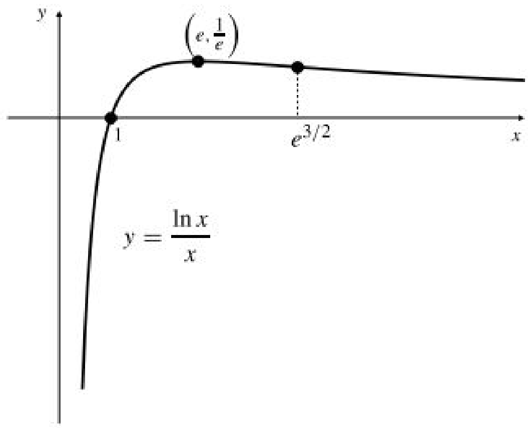
31.



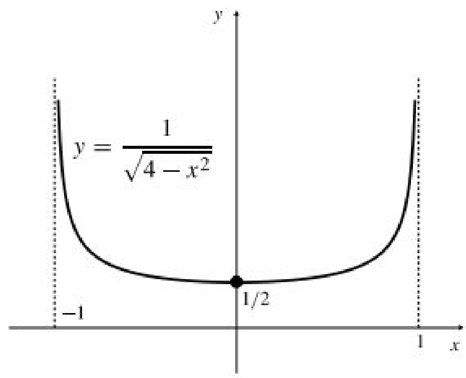
33.



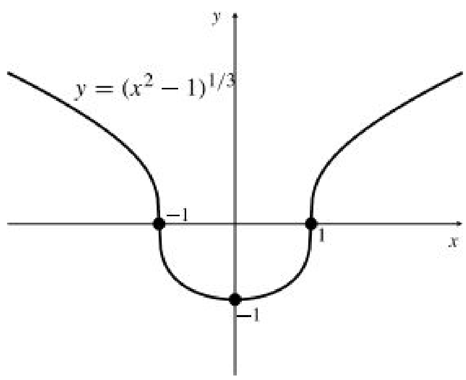
35.



37.



39.



41. $y = 0$. La curva corta a la asíntota en $x = n\pi$ para todo entero n.

Sección 4.5 (página 290)

1. 49/4 **3.** 20 y 40

5. 71.45 **11.** R^2 unidades cuad.

13. $2ab$ unidades^2 **15.** 50 cm^2

17. anchura $8 + 10\sqrt{2}$ m, altura $4 + 5\sqrt{2}$ m

19. descuento de 250 $

21. punto 5 km al este de A

23. (a) 0 m, (b) $\pi/(4 + \pi)$ m

25. $8\sqrt{3}$ unidades

27. $[(a^{2/3} + b^{2/3})^3 + c^2]^{1/2}$ unidades

29. $3^{1/2}/2^{1/3}$ unidades

31. altura $\dfrac{2R}{\sqrt{3}}$, radio $\sqrt{\dfrac{2}{3}}\,R$ unidades

33. base 2 m × 2 m, altura 1 m

35. anchura $\dfrac{20}{4 + \pi}$ m, altura $\dfrac{10}{4 + \pi}$ m

39. anchura R, profundidad $\sqrt{3}R$ **41.** $Q = 3L/8$

43. 750 coches

45. $\dfrac{5000}{\pi}$ m^2; semicircunferencia

47. $\dfrac{3\sqrt{3a}}{4}$ cm

Sección 4.6 (página 300)

1. 1.41421356237 **3.** 0.453397651516

5. 1.64809536561, 2.352392647658

7. 0.510973429389

9. infinitas 4.49340945791

13. máx. 1, mín. -0.11063967219 ...

15. $x_1 = -a$, $x_2 = a = x_0$. Buscar una raíz en la mitad de x_0 y x_1

17. $x_n = (-1/2)^n \to 0$ (raíz) cuando $n \to \infty$

19. 0.95025 **21.** 0.45340

23. $N(x_n)$ es la aproximación por el Método de Newton

Sección 4.7 (página 306)

1. $6x - 9$ **3.** $2 - (x/4)$

5. $(7 - 2x)/27$ **7.** $\pi - x$

9. $(1/4) + (\sqrt{3}/2)(x - (\pi/6))$

11. aprox. 8 cm^2 **13.** aprox. 62.8 millas

15. $\sqrt{50} \approx \dfrac{99}{14} \approx 7.071429$, error < 0, $|\text{error}| < \dfrac{1}{2744} \approx 0.0003644$, (7.07106, 7.071429)

17. $\sqrt[4]{85} \approx \dfrac{82}{27}$, error < 0, $|\text{error}| < \dfrac{1}{2 \times 3^6}$, (3.03635, 3.03704)

19. $\cos 46^\circ \approx \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \dfrac{\pi}{180}\right) \approx 0.694765$, error < 0, $|\text{error}| < \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(\dfrac{\pi}{180}\right)^2$, (0.694658, 0.694765)

21. $\operatorname{sen}(3.14) \approx \pi - 3.14$, error < 0, $|\text{error}| < (\pi - 3.14)^3/2 < 2.02 \times 10^{-9}$, $(\pi - 3.14 - (\pi - 3.14)^3/2, \pi - 3.14)$

23. (7.07106, 7.07108), $\sqrt{50} \approx 7.07107$

25. (0.80891, 0.80921), $\sqrt[4]{85} \approx 0.80906$

27. $3 \leqslant f(3) \leqslant 13/4$

29. $g(1.8) \approx 0.6$, $|\text{error}| < 0.0208$

31. aprox. 1005 cm^3

Sección 4.8 (página 314)

1. $1 - x + \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{1}{24}x^4$

3. $\ln 2 + \dfrac{x - 2}{2} - \dfrac{(x - 2)^2}{8} + \dfrac{(x - 3)^3}{24} - \dfrac{(x - 2)^4}{64}$

5. $2 + \dfrac{x - 4}{4} - \dfrac{(x - 4)^2}{64} + \dfrac{3(x - 4)^3}{1536}$

7. $P_n(x) = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{9}(x - 1) + \dfrac{1}{27}(x - 1)^2 - \cdots + \dfrac{(-1)^n}{3^{n+1}}(x - 1)^n$

9. $x^{1/3} \approx 2 + \dfrac{1}{12}(x - 8) - \dfrac{1}{288}(x - 8)^2$, $9^{1/3} \approx 2.07986$, $0 < \text{error} \leqslant 5/(81 \times 256)$, $2.07986 < 9^{1/3} < 2.08010$

11. $\dfrac{1}{x} \approx 1 - (x - 1) + (x - 1)^2$, $\dfrac{1}{1.02} \approx 0.9804$, $-(0.02)^3 \leqslant \text{error} < 0$, $0.0980392 \leqslant \dfrac{1}{1.02} < 0.9804$

13. $e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2$, $e^{-0.5} \approx 0.625$,

$-\frac{1}{6}(0.5)^3 \leqslant \text{error} < 0.0604 \leqslant e^{-0.5} < 0.625$

15. $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + R_7$;

$R_7 = \frac{\operatorname{sen} c}{8!}x^8$ para algún c entre 0 y x

17. $\operatorname{sen} x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[1 + \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \right.$ $\left. - \frac{1}{3!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{1}{4!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4\right] + R_4$;

con $R_4 = \frac{\cos c}{5!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^5$ para algún c entre x y $\pi/4$

19. $\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - $ $- \frac{(x-11)^4}{4} + \frac{(x-1)^5}{5} - \frac{(x-1)^6}{6} + R_6$;

con $R_6 = \frac{(x-1)^7}{7c^7}$ para algún c entre 1 y x

21. $\frac{1}{e^3} + \frac{3}{e^3}(x+1) + \frac{9}{2e^3}(x+1)^2 + \frac{9}{2e^3}(x+1)^3$

23. $x^2 - \frac{1}{3}x^4$ **25.** $1 - 2x^2 + 4x^4 - 8x^6$

27. $P_n(x) = 0$ si $0 \leqslant n \leqslant 2$; $P_n(x) = x^3$ si $n \geqslant 3$

29. $x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

31. $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + R_n$;

con $R_n = (-1)^{n+1}\frac{e^{-X}x^{n+1}}{(n+1)!}$ para algún X entre 0 y x;

$\frac{1}{e} \approx \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{8!} \approx 0.36788$

33. $1 - 2x + x^2$ (f es su propia aproximación cuadrática; (error = 0). $g(x) \approx 4 + 3x + 2x^2$; error $= x^3$; ya que $g'''(x) = 6 = 3!$, por lo tanto error $= \frac{g'''(c)}{3!}x^3$; no hay mejora posible.

35. $P_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n$

Sección 4.9 (página 321)

1. 3/4 **3.** a/b
5. 1 **7.** 1
9. 0 **11.** $-3/2$
13. 1 **15.** $-1/2$
17. ∞ **19.** $2/\pi$
21. -2 **23.** a
25. 1 **27.** $-1/2$
29. e^{-2} **31.** 0
33. $f''(x)$

Ejercicios de repaso (página 322)

1. 6%/min
3. (a) -1600 ohm/min, (b) -1350 ohm/min
5. 2, 000 **7.** $32\pi R^3/81$ un^3
9. 9000 cm^3 **11.** aprox. 0.057 rad/s
13. aprox. 9.69465 cm **15.** 2.06%
17. $\frac{\pi}{4} + 0.0475 \approx 0.83290$, $|\text{error}| < 0.00011$
19. 0, 1.4055636328
21. aprox. $(-1.1462, 0.3178)$

Problemas avanzados (página 324)

1. (a) $\frac{dx}{dt} = \frac{k}{3}(x_0^3 - x^3)$, (b) $V_0/2$
3. (b) 11
5. (c) $y_0(1 - (t/T))^2$, (d) $(1 - (1/\sqrt{2}))T$
7. $P^2(3 - 2\sqrt{2})/4$
9. (a) $\cos^{-1}(r_2/r_1)^2$, (b) $\cos^{-1}(r_2/r_1)^4$
11. aprox. 921 cm^3

Capítulo 5
Integración

Sección 5.1 (página 331)

1. $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$ **3.** $3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n$

5. $\dfrac{(-2)^3}{1^2} + \dfrac{(-2)^4}{2^2} + \dfrac{(-2)^5}{3^2} + \cdots + \dfrac{(-2)^n}{(n-2)^2}$

7. $\sum_{i=5}^{9} i$ **9.** $\sum_{i=2}^{99} (-1)^i i^2$

11. $\sum_{i=0}^{n} x^i$ **13.** $\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1}/i^2$

15. $\sum_{i=1}^{100} \operatorname{sen}(i-1)$ **17.** $n(n+1)(2n+7)/6$

19. $\dfrac{\pi(\pi^n - 1)}{\pi - 1} - 3n$ **21.** $\ln(n!)$

23. 400 **25.** $(x^{2n+1} + 1)/(x+1)$

27. -4949 **31.** $2^m - 1$

33. $n/(n+1)$

Sección 5.2 (página 339)

1. 3/2 unidades al cuad.

3. 6 unidades al cuad.

5. 26/3 unidades al cuad.

7. 15 unidades al cuad.

9. 4 unidades al cuad.

11. 32/3 unidades al cuad.

13. $3/(2\ln 2)$ unidades al cuad.

15. $\ln(b/a)$, se deduce de la definición de ln

17. 0 **19.** $\pi/4$

Sección 5.3 (página 344)

1. $L(f, P_8) = 7/4, \quad U(f, P_8) = 9/4$

3. $L(f, P_4) = \dfrac{e^4 - 1}{e^2(e-1)} \approx 4.22,$

$U(f, P_4) = \dfrac{e^4 - 1}{e(e-1)} \approx 11.48$

5. $L(f, P_6) = \dfrac{\pi}{6}(1 + \sqrt{3}) \approx 1.43,$

$U(f, P_6) = \dfrac{\pi}{6}(3 + \sqrt{3}) \approx 2.48$

7. $L(f, P_n) = \dfrac{n-1}{2n}, U(f, P_n) = \dfrac{n+1}{2n}, \displaystyle\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$

9. $L(f, P_n) = \dfrac{(n-1)^2}{4n^2}, U(f, P_n) = \dfrac{(n+1)^2}{4n^2},$

$\displaystyle\int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{4}$

11. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\,dx$ **13.** $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx$

15. $\displaystyle\int_0^1 \tan^{-1} x\,dx$

Sección 5.4 (página 351)

1. 0 **3.** 8

5. $(b^2 - a^2)/2$ **7.** π

9. 0 **11.** 2π

13. 0 **15.** $(2\pi + 3\sqrt{3})/6$

17. 16 **19.** 32/3

21. $(4 + 3\pi)/12$ **23.** $\ln 2$

25. $\ln 3$ **27.** 4

29. 1 **31.** $\pi/2$

33. 1 **35.** 11/6

37. $\dfrac{\pi}{3} - \sqrt{3}$ **39.** 41/2

41. 3/4 **43.** $k = \bar{f}$

Sección 5.5 (página 357)

1. 4 **3.** 1

5. 9 **7.** $80\dfrac{4}{5}$

9. $\dfrac{2 - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$ **11.** $(1/\sqrt{2}) - (1/2)$

13. $e^{\pi} - e^{-\pi}$ **15.** $(a^e - 1)/\ln a$

17. $\pi/2$ **19.** $\dfrac{\pi}{3}$

21. $\dfrac{1}{5}$ unidades al cuad. **23.** $\dfrac{32}{3}$ unidades al cuad.

25. $\dfrac{1}{6}$ unidades al cuad. **27.** $\dfrac{1}{3}$ unidades al cuad.

29. $\dfrac{1}{12}$ unidades al cuad. **31.** 2π unidades al cuad.

33. 3 **35.** $\frac{16}{3}$

37. $e - 1$ **39.** $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$

41. $-2\,\frac{\operatorname{sen} x^2}{x}$ **43.** $\frac{\cos t}{1 + t^2}$

45. $(\cos x)/(2\sqrt{x})$ **47.** $f(x) = \pi e^{\pi(x-1)}$

49. $1/x^2$ no es continua (ni siquiera está definida) en $x = 0$, por lo que el Teorema Fundamental del Cálculo no se puede aplicar en $[-1, 1]$; como $1/x^2 > 0$ en su dominio, hay que esperar que la integral fuera positiva si existiera (no existe).

51. $F(x)$ tiene un valor máximo en $x = 1$ pero no tiene valor mínimo.

53. 2

Sección 5.6 (página 366)

1. $-\frac{1}{2}\,e^{5-2x} + C$ **3.** $\frac{2}{9}\,(3x + 4)^{3/2} + C$

5. $-\frac{1}{32}\,(4x^2+1)^{-4}+C$ **7.** $\frac{1}{2}\,e^{x^2} + C$

9. $\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen} x\right) + C$

11. $2\ln|e^{x/2} - e^{-x/2}| + C = \ln|e^x - 2 + e^{-x}| + C$

13. $-\frac{2}{5}\sqrt{4 - 5s} + C$ **15.** $\frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{t^2}{2}\right) + C$

17. $-\ln(1 + e^{-x}) + C$ **19.** $-\frac{1}{2}\,(\ln\cos x)^2 + C$

21. $\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x + 3}{2} + C$

23. $\frac{1}{8}\cos^8 x - \frac{1}{6}\cos^6 x + C$

25. $-\frac{1}{3a}\cos^3 ax + C$

27. $\frac{5}{16}\,x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \frac{3}{64}\operatorname{sen} 4x + \frac{1}{48}\operatorname{sen}^3 2x + C$

29. $\frac{1}{5}\sec^5 x + C$

31. $\frac{2}{3}\,(\tan x)^{3/2} + \frac{2}{7}\,(\tan x)^{7/2} + C$

33. $\frac{3}{8}\operatorname{sen} x - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2\operatorname{sen} x) + \frac{1}{32}\operatorname{sen}(4\operatorname{sen} x) + C$

35. $\frac{1}{3}\tan^3 x + C$

37. $-\frac{1}{9}\csc^9 x + \frac{2}{7}\csc^7 x - \frac{1}{5}\csc^5 x + C$

39. $\frac{14}{3}\sqrt{17} + \frac{2}{3}$ **41.** $3\pi/16$

43. $\ln 2$ **45.** $2,\ 2(\sqrt{2} - 1)$

47. $\pi/32$ unidades al cuad.

Sección 5.7 (página 371)

1. $\frac{1}{6}$ unidades al cuad.

3. $\frac{64}{3}$ unidades al cuad.

5. $\frac{125}{12}$ unidades al cuad.

7. $\frac{1}{2}$ unidades al cuad.

9. $\frac{5}{12}$ unidades al cuad.

11. $\frac{15}{8} - 2\ln 2$ unidades al cuad.

13. $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$ unidades al cuad.

15. $\frac{4}{3}$ unidades al cuad.

17. $2\sqrt{2}$ unidades al cuad.

19. $1 - \pi/4$ unidades al cuad.

21. $(\pi/8) - \ln\sqrt{2}$ unidades al cuad.

23. $(4\pi/3) - 2\ln(2 + \sqrt{3})$ unidades al cuad.

25. $(4/\pi) - 1$ unidades al cuad.

27. $\frac{4}{3}$ unidades al cuad.

29. $\frac{e}{2} - 1$ unidades al cuad.

Ejercicios de repaso (página 372)

1. la suma es $n(n+2)/(n+1)^2$
3. $20/3$
5. 4π
7. 0
9. 2
11. $\operatorname{sen}(t^2)$
13. $-4e^{\operatorname{sen}(4s)}$
15. $f(x) = -\dfrac{1}{2}e^{(3/2)(1-x)}$
17. $9/2$ unidades al cuad.
19. $3/10$ unidades al cuad.
21. $(3\sqrt{3}/4) - 1$ unidades al cuad.
23. $\dfrac{1}{6}\operatorname{sen}(2x^3+1) + C$
25. $98/3$
27. $(\pi/8) - (1/2)\tan^{-1}(1/2)$
29. $-\cos\sqrt{2s+1} + C$
31. mín. $-\pi/4$, no máx.
35. $x_1 = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}},\quad x_2 = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}$

Capítulo 6
Técnicas de integración

Sección 6.1 (página 381)

1. $x\operatorname{sen}x + \cos x + C$
3. $\dfrac{1}{\pi}x^2\operatorname{sen}\pi x + \dfrac{2}{\pi^2}x\cos\pi x - \dfrac{2}{\pi^3}\operatorname{sen}\pi x + C$
5. $\dfrac{1}{4}x^4\ln x - \dfrac{1}{16}x^4 + C$
7. $x\tan^{-1}x - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$
9. $\left(\dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{4}\right)\operatorname{sen}^{-1}x + \dfrac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} + C$
11. $\dfrac{7}{8}\sqrt{2} + \dfrac{3}{8}\ln(1+\sqrt{2})$
13. $\dfrac{1}{13}e^{2x}(2\operatorname{sen}3x - 3\cos 3x) + C$
15. $\ln(2+\sqrt{3}) - \dfrac{\pi}{6}$
17. $x\tan x - \ln|\sec x| + C$
19. $\dfrac{x}{2}[\cos(\ln x) + \operatorname{sen}(\ln x)] + C$
21. $\ln x(\ln(\ln x) - 1) + C$
23. $x\cos^{-1}x - \sqrt{1-x^2} + C$
25. $\dfrac{2\pi}{3} - \ln(2+\sqrt{3})$
27. $\dfrac{1}{2}(x^2+1)(\tan^{-1}x)^2 - x\tan^{-1}x + \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$
29. $\dfrac{1+e^{-\pi}}{2}$ unidades al cuadrado
31. $I_n = x(\ln x)^n - nI_{n-1}$,
$I_4 = x[(\ln x)^4 - 4(\ln x)^3 + 12(\ln x)^2 - 24(\ln x) + 24] + C$
33. $I_n = -\dfrac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1}x\cos x + \dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$,
$I_6 = \dfrac{5x}{16} - \cos x\left[\dfrac{1}{6}\operatorname{sen}^5 x + \dfrac{5}{24}\operatorname{sen}^3 x + \dfrac{5}{16}\operatorname{sen}x\right] + C$,
$I_7 = -\cos x\left[\dfrac{1}{7}\operatorname{sen}^6 x + \dfrac{6}{35}\operatorname{sen}^4 x + \dfrac{8}{35}\operatorname{sen}^2 x + \dfrac{16}{35}\right] + C$
35. $I_n = \dfrac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + \dfrac{2n-3}{2a^2(n-1)}I_{n-1}$,
$I_3 = \dfrac{x}{4a^2(x^2+a^2)^2} + \dfrac{3x}{8a^4(x^2+a^2)} + \dfrac{3}{8a^5}\tan^{-1}\dfrac{x}{a} + C$
37. Cualquier condición que garantice que $f(b)g'(b) - f'(b)g(b) = f(a)g'(a) - f'(a)g(a)$ será suficiente

Sección 6.2 (página 390)

1. $\dfrac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1}(2x) + C$
3. $\dfrac{9}{2}\operatorname{sen}^{-1}\dfrac{x}{3} - \dfrac{1}{2}x\sqrt{9-x^2} + C$
5. $-\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{9x} + C$
7. $-\sqrt{9-x^2} + \operatorname{sen}^{-1}\dfrac{x}{3} + C$
9. $\dfrac{1}{3}(9+x^2)^{3/2} - 9\sqrt{9+x^2} + C$
11. $\dfrac{1}{a^2}\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} + C$

13. $\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} - \operatorname{sen}^{-1}\dfrac{x}{a} + C$

15. $\dfrac{1}{2}\sec^{-1}\dfrac{x}{2} + C$ 17. $\dfrac{1}{3}\tan^{-1}\dfrac{x+1}{3} + C$

19. $\dfrac{1}{32}\tan^{-1}\dfrac{2x+1}{2} + \dfrac{1}{16}\dfrac{2x+1}{4x^2+4x+5} + C$

21. $a\operatorname{sen}^{-1}\dfrac{x-a}{a} - \sqrt{2ax-x^2} + C$

23. $\dfrac{3-x}{4\sqrt{3-2x-x^2}} + C$

25. $\dfrac{3}{8}\tan^{-1}x + \dfrac{3x^3+5x}{8(1+x^2)^2} + C$

27. $\dfrac{1}{2}\ln(1+\sqrt{1-x^2}) - \dfrac{1}{2}\ln|x| - \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{2x^2} + C$

29. $2\sqrt{x} - 4\ln(2+\sqrt{x}) + C$

31. $\dfrac{6}{7}x^{7/6} - \dfrac{6}{5}x^{5/6} + \dfrac{3}{2}x^{2/3} + 2x^{1/2}$
$-3x^{1/3} - 6x^{1/6} + 3\ln(1+x^{1/3}) + 6\tan^{-1}x^{1/6} + C$

33. $\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\sqrt{3}}{8}$ 35. $\pi/3$

37. $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\dfrac{2\tan(\theta/2)+1}{\sqrt{3}}\right) + C$

39. $\dfrac{2}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\left(\dfrac{\tan(\theta/2)}{\sqrt{5}}\right) + C$

41. $\dfrac{9}{2\sqrt{2}}\tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{2}$ unidades al cuad.

43. $a^2\cos^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right) - b\sqrt{a^2-b^2}$ unidades al cuad.

45. $\dfrac{25}{2}\left(\operatorname{sen}^{-1}\dfrac{4}{5} - \operatorname{sen}^{-1}\dfrac{3}{5}\right) - 12\ln\dfrac{4}{3}$ unidades al cuad.

47. $\dfrac{\ln(Y+\sqrt{1+Y^2})}{2}$ unidades al cuad.

Sección 6.3 (página 398)

1. $\ln|2x-3| + C$

3. $\dfrac{x}{\pi} - \dfrac{2}{\pi^2}\ln|\pi x + 2| + C$

5. $\dfrac{1}{6}\ln\left|\dfrac{x-3}{x+3}\right| + C$ 7. $\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + C$

9. $x - \dfrac{4}{3}\ln|x+2| + \dfrac{1}{3}\ln|x-1| + C$

11. $3\ln|x+1| - 2\ln|x| + C$

13. $\dfrac{1}{3(1-3x)} + C$

15. $-\dfrac{1}{9}x - \dfrac{13}{54}\ln|2-3x| + \dfrac{1}{6}\ln|x| + C$

17. $\dfrac{1}{2a^2}\ln\dfrac{|x^2-a^2|}{x^2} + C$

19. $x + \dfrac{a}{3}\ln|x-a| - \dfrac{a}{6}\ln(x^2+ax+a^2)$
$-\dfrac{a}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\dfrac{2x+a}{\sqrt{3a}} + C$

21. $\dfrac{1}{3}\ln|x| - \dfrac{1}{2}\ln|x-1| + \dfrac{1}{6}\ln|x-3| + C$

23. $\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right| - \dfrac{x}{2(x^2-1)} + C$

25. $\dfrac{1}{27}\ln\left|\dfrac{x-3}{x}\right| + \dfrac{1}{9x} + \dfrac{1}{6x^2} + C$

27. $\dfrac{t-1}{4(t^2+1)} - \dfrac{1}{4}\ln|t+1| + \dfrac{1}{8}\ln(t^2+1) + C$

29. $\dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right| + \dfrac{1}{12}\ln\left(\dfrac{(2+\sqrt{1-x^2})^2}{3+x^2}\right) + C$

31. $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1-\sqrt{1+x^2}}{1+\sqrt{1+x^2}}\right| + C$

33. $\dfrac{1-2x^2}{x\sqrt{x^2-1}} + C$

Sección 6.4 (página 402)

5. $\dfrac{x\sqrt{x^2-2}}{2} + \ln|x+\sqrt{x^2-2}| + C$

7. $-\sqrt{3t^2+5}/(5t) + C$

9. $(x^5/3125)(625(\ln x)^4 - 500(\ln x^3) + 300(\ln x)^2 -$
$-120\ln x + 24) + C$

11. $(1/6)(2x^2-x-3)\sqrt{2x-x^2} -$
$-(1/2)\operatorname{sen}^{-1}(1-x) + C$

13. $(x-2)/(4\sqrt{4x-x^2}) + C$

Sección 6.5 (página 411)

1. 1/2 **3.** 1/2
5. $3 \times 2^{1/3}$ **7.** 3/2
9. 3 **11.** π
13. 1/2 **15.** diverge a ∞
17. 2 **19.** diverge
21. 0 **23.** 1 unidad al cuad.
25. $2\ln 2$ unidades al cuad. **29.** 2
31. diverge a ∞ **33.** converge
35. diverge a ∞ **37.** diverge a ∞
39. diverge **41.** diverge a ∞

Sección 6.6 (página 419)

1. $T_4 = 4.75$,
$M_4 = 4.625$,
$T_8 = 4.6875$,
$M_8 = 4.65625$,
$T_{16} = 4.671875$,
Errores reales:
$I - T_4 \approx -0.833333$,
$I - M_4 \approx 0.0416667$,
$I - T_8 \approx -0.0208333$,
$I - M_8 \approx 0.0104167$,
$I - T_{16} \approx -0.0052083$
Errores estimados:
$|I - T_4| \leqslant 0.0833334$,
$|I - M_4| \leqslant 0.0416667$,
$|I - T_8| \leqslant 0.0208334$,
$|I - M_8| \leqslant 0.0104167$,
$|I - T_{16}| \leqslant 0.0052084$

3. $T_4 = 0.9871158$,
$M_4 = 1.0064545$,
$T_8 = 0.9967852$,
$M_8 = 1.0016082$,
$T_{16} = 0.9991967$,
Errores reales:
$I - T_4 \approx 0.0128842$,
$I - M_4 \approx -0.0064545$,
$I - T_8 \approx 0.0032148$,
$I - M_8 \approx -0.0016082$,
$I - T_{16} \approx 0.0008033$
Errores estimados:
$|I - T_4| \leqslant 0.020186$,
$|I - M_4| \leqslant 0.010093$,
$|I - T_8| \leqslant 0.005047$,
$|I - M_8| \leqslant 0.002523$,
$|I - T_{16}| \leqslant 0.001262$

5. $T_4 = 46$, $T_8 = 46.7$

7. $T_4 = 3000$ km^2, $T_8 = 3400$ km^2

9. $T_4 \approx 2.02622$, $M_4 \approx 2.03236$,
$T_8 \approx 2.02929$, $M_8 \approx 2.02982$,
$T_{16} \approx 2.029555$

11. $M_8 \approx 1.3714136$, $T_{16} \approx 1.3704366$, $I \approx 1.371$

Sección 6.7 (página 424)

1. $S_4 = S_8 = I$, Errores $= 0$

3. $S_4 \approx 1.0001346$, $S_8 \approx 1.0000083$,
$I - S_4 \approx -0.0001346$, $I - S_8 \approx -0.0000083$

5. 46.93

7. Para $f(x) = e^{-x}$:
$|I - S_4| \leqslant 0.000022$, $|I - S_8| \leqslant 0.0000014$;
para $f(x) = \operatorname{sen} x$,
$|I - S_4| \leqslant 0.00021$,
$|I - S_8| \leqslant 0.000013$

9. $S_4 \approx 2.034333$, $S_8 \approx 2.0303133$,
$S_{16} \approx 2.0296433$

Sección 6.8 (página 430)

1. $3\displaystyle\int_0^1 \frac{u\,du}{1+u^3}$

3. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{\operatorname{sen}\theta}\,d\theta$, o $\displaystyle 2\int_0^1 \frac{e^{1-u^2}+e^{u^2-1}}{\sqrt{2-u^2}}\,du$

5. $4\displaystyle\int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{(2-v^2)(2-2v^2+v^4)}}$

7. $T_2 \approx 0.603553$, $T_4 \approx 0.643283$,
$T_8 \approx 0.658130$, $T_{16} \approx 0.663581$;
Errores: $I - T_2 \approx 0.0631$, $I - T_4 \approx 0.0234$,
$I - T_8 \approx 0.0085$, $I - T_{16} \approx 0.0031$;
Los errores no decrecen como $1/n^2$ porque la segunda derivada de $f(x) = \sqrt{x}$ no está acotada en $[0, 1]$.

9. $I \approx 0.74684$ con error menor que 10^{-4}; se necesitan siete términos de la serie.

11. $A = 1$, $u = 1/\sqrt{3}$

13. $A = 5/9$, $B = 8/9$, $u = \sqrt{3/5}$

15. $R_1 \approx 0.7471805$, $R_2 \approx 0.7468337$, $R_3 \approx 0.7468241$, $I \approx 0.746824$

17. $R_2 = \dfrac{2h}{45}(7y_0 + 32y_1 + 12y_2 + 32y_3 + 7y_4)$

Ejercicios de repaso en técnicas de integración (página 431)

1. $\dfrac{2}{3}\ln|x+2| - \dfrac{1}{6}\ln|2x+1| + C$

3. $\dfrac{1}{4}\operatorname{sen}^4 x - \dfrac{1}{6}\operatorname{sen}^6 x + C$ **5.** $\dfrac{3}{4}\ln\left|\dfrac{2x-1}{2x+1}\right| + C$

7. $-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^3 + C$ **9.** $\dfrac{1}{5}(5x^3-2)^{1/3} + C$

11. $\dfrac{1}{16}\tan^{-1}\dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{8(4+x^2)} + C$

13. $\dfrac{1}{2\ln 2}\left(2^x\sqrt{1+4^x} + \ln(2^x + \sqrt{1+4^x})\right) + C$

15. $\dfrac{1}{4}\tan^4 x + \dfrac{1}{6}\tan^6 x + C$

17. $-e^{-x}\left(\dfrac{2}{5}\cos 2x + \dfrac{1}{5}\operatorname{sen} 2x\right) + C$

19. $\dfrac{x}{10}(\cos(3\ln x) + 3\operatorname{sen}(3\ln x)) + C$

21. $\dfrac{1}{4}(\ln(1+x^2))^2 + C$

23. $\operatorname{sen}^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{2}} - \dfrac{x\sqrt{2-x^2}}{2} + C$

25. $\dfrac{1}{64}\left(-\dfrac{1}{7(4x+1)^7} + \dfrac{1}{4(4x+1)^8} - \dfrac{1}{9(4x+1)^9}\right) + C$

27. $-\dfrac{1}{4}\cos 4x + \dfrac{1}{6}\cos^3 4x - \dfrac{1}{20}\cos^5 4x + C$

29. $-\dfrac{1}{2}\ln(2e^{-x}+1) + C$

31. $-\dfrac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen} x - 4\ln(2 - \operatorname{sen} x) + C$

33. $-\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C$

35. $\dfrac{1}{48}(1-4x^2)^{3/2} - \dfrac{1}{16}\sqrt{1-4x^2} + C$

37. $\sqrt{x^2+1} + \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C$

39. $x + \dfrac{1}{3}\ln|x| + \dfrac{4}{3}\ln|x-3| - \dfrac{5}{3}\ln|x+3| + C$

41. $-\dfrac{1}{10}\cos^{10} x + \dfrac{1}{6}\cos^{12} x - \dfrac{1}{14}\cos^{14} x + C$

43. $\dfrac{1}{2}\ln|x^2+2x-1| - \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\dfrac{x+1-\sqrt{2}}{x+1+\sqrt{2}}\right| + C$

45. $\dfrac{1}{3}x^3\operatorname{sen}^{-1}2x + \dfrac{1}{24}\sqrt{1-4x^2} - \dfrac{1}{72}(1-4x^2)^{3/2} + C$

47. $\dfrac{1}{128}\left(3x - \operatorname{sen}(4x) + \dfrac{1}{8}\operatorname{sen}(8x)\right)$

49. $\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{x}}{2} + C$

51. $\dfrac{x^2}{2} - 2x + \dfrac{1}{4}\ln|x| + \dfrac{1}{2x} + \dfrac{15}{4}\ln|x+2| + C$

53. $-\dfrac{1}{2}\cos(2\ln x) + C$ **55.** $\dfrac{1}{2}\exp(2\tan^{-1}x) + C$

57. $\dfrac{1}{4}(\ln(3+x^2))^2 + C$ **59.** $\dfrac{1}{2}(\operatorname{sen}^{-1}(x/2))^2 + C$

61. $\sqrt{x^2+6x+10} - 2\ln(x+3+\sqrt{x^2+6x+10}) + C$

63. $\dfrac{2}{5(2+x^2)^{5/2}} - \dfrac{1}{3(2+x^2)^{3/2}} + C$

65. $\dfrac{6}{7}x^{7/6} - \dfrac{6}{5}x^{5/6} + 2\sqrt{x} - 6x^{1/6} - 6\tan^{-1}x^{1/6} + C$

67. $\dfrac{2}{3}x^{3/2} - x + 4\sqrt{x} - 4\ln(1+\sqrt{x}) + C$

69. $\dfrac{1}{2(4-x^2)} + C$

71. $\dfrac{1}{3}x^3\tan^{-1}x - \dfrac{1}{6}x^2 + \dfrac{1}{6}\ln(1+x^2) + C$

73. $\dfrac{1}{5}\ln\left|\dfrac{3\tan(x/2)-1}{\tan(x/2)+3}\right| + C$

75. $\dfrac{1}{2}\ln|\tan(x/2)| - \dfrac{1}{4}(\tan^{-1}(x/2))^2 + C =$
$= \dfrac{1}{4}\left(\ln\left|\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| - \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}\right) + C$

77. $2\sqrt{x} - 2\tan^{-1}\sqrt{x} + C$

79. $\frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}\ln|x-2| - \frac{2}{3}\ln(x^2+2x+4)$
$+ \frac{4}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{x+1}{\sqrt{3}} + C$

Ejercicios de repaso (otros) (página 433)

1. $I = \frac{1}{2}(xe^x \cos x + (x-1)e^x \operatorname{sen} x)$,
$J = \frac{1}{2}((1-x)e^x \cos x + xe^x \operatorname{sen} x)$

3. diverge a ∞ **5.** $-4/9$

9. 367 000 m^3

11. $T_8 = 1.61800$, $S_8 = 1.62092$, $I \approx 1.62$

13. (a) $T_4 = 5.526$, $S_4 = 5.504$; (b) $S_8 = 5.504$; (c) sí, porque $S_4 = S_8$, y la regla de Simpson es exacta para cúbicas.

Problemas avanzados (página 434)

1. (c) $I = \frac{1}{630}, \frac{22}{7} - \frac{1}{630} < \pi < \frac{22}{7} - \frac{1}{1260}$

3. (a) $\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$,
(b) $\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}(\sqrt{2}x+1) + \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}(\sqrt{2x}-1)$

7. (a) $a = 7/90$, $b = 16/45$, $c = 2/15$.
(b) un intervalo: aprox. 0.6321208750, dos intervalos: aprox. 0.6321205638, valor correcto: 0.6321205588

Capítulo 7
Aplicaciones de integración

Sección 7.1 (página 445)

1. $\frac{\pi}{5}$ unidades al cubo **3.** $\frac{3\pi}{10}$ unidades al cubo

5. (a) $\frac{16\pi}{15}$ unids. al cubo, (b) $\frac{8\pi}{3}$ unids. al cubo

7. (a) $\frac{27\pi}{2}$ unids. al cubo, (b) $\frac{108\pi}{5}$ unids. al cubo

9. (a) $\frac{15\pi}{4} - \frac{\pi^2}{8}$ unids. al cubo,
(b) $\pi(2 - \ln 2)$ unids. al cubo

11. $\frac{10\pi}{3}$ unidades al cubo **13.** aprox. 35%

15. $\frac{\pi h}{3}\left(b^2 - 3a^2 + \frac{2a^3}{b}\right)$ unidades al cubo

17. $\frac{\pi}{3}(a-b)^2(2a+b)$ unidades al cubo

19. $\frac{4\pi ab^2}{3}$ unidades al cubo

21. (a) $\pi/2$ unids. al cubo, (b) 2π unids. al cubo

23. $k > 2$ **25.** sí; no; $a^2b/2$ cm^3

27. aprox. 1537 unids. al cubo

29. $8192\pi/105$ unids. al cubo

31. $R = \frac{h \operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha + \cos 2\alpha}$

Sección 7.2 (página 449)

1. 6 m^3 **3.** $\pi/3$ unidades^3

5. 132 pies^3 **7.** $\pi a^2 h/2$ cm^3

9. $3z^2$ unids. al cuad. **11.** $\frac{16r^3}{3}$ unids. al cubo

13. 72π cm^3

15. $\pi r^2(a+b)/2$ unids. al cubo

17. $\frac{16\,000}{3}$ unids. al cubo **19.** $12\pi\sqrt{2}$ pulgadas^3

21. aprox. 97.28 cm^3

Sección 7.3 (página 458)

1. $2\sqrt{5}$ unidades **3.** 52/3 unidades

5. $(2/27)(13^{3/2} - 8)$ unidades **7.** 6 unidades

9. $(e^2 + 1)/4$ unidades **11.** $\sinh a$ unidades

13. $\sqrt{17} + \frac{1}{4}\ln(4 + \sqrt{17})$ unidades

15. $6a$ unidades **17.** 1.0338 unidades

19. 1.0581

21. $(10^{3/2} - 1)\pi/27$ unidades al cuad.

23. $\dfrac{64\pi}{81}\left[\dfrac{(13/4)^{5/2}-1}{5} - \dfrac{(13/4)^{3/2}-1}{3}\right]$ unidades al cuad.

25. $2\pi(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))$ unidades al cuad.

27. $2\pi\left(\dfrac{255}{16} + \ln 4\right)$ unidades al cuad.

29. $4\pi^2 ab$ unidades al cuad.

31. $8\pi\left(1 + \dfrac{\ln(2+\sqrt{3})}{2\sqrt{3}}\right)$ unidades al cuad.

33. $s = \dfrac{5}{\pi}\sqrt{4+\pi^2}\,E\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{4+\pi^2}}\right)$

35. $k > -1$

37. (a) π unids. al cubo; (c) «Cubrir» una superficie con pintura requiere poner una capa de espesor constante. Suficientemente lejos hacia la derecha, el asta es más fina que cualquier constante fijada, por lo que puede contener menos pintura de la necesaria para cubrir su superficie.

Sección 7.4 (página 466)

1. masa $\dfrac{2L}{\pi}$; centro de masas en $\bar{s} = \dfrac{L}{2}$

3. $m = \dfrac{1}{4}\pi\delta_0 a^2$; $\bar{x} = \bar{y} = \dfrac{4a}{3\pi}$

5. $m = \dfrac{256k}{15}$; $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = \dfrac{16}{7}$

7. $m = \dfrac{ka^3}{2}$; $\bar{x} = \dfrac{2a}{3}$, $\bar{y} = \dfrac{a}{2}$

9. $m = \displaystyle\int_a^b \delta(x)(g(x) - f(x))\,dx$;

$M_{x=0} = \displaystyle\int_a^b x\delta(x)(g(x) - f(x))\,dx$, $\bar{x} = M_{x=0}/m$,

$M_{y=0} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_a^b \delta(x)((g(x))^2 - (f(x))^2)\,dx$,

$\bar{y} = M_{y=0}/m$

11. La masa es $\dfrac{8}{3}\pi R^3$ kg. El centro de masas está en la recta perpendicular al plano que pasa por el centro de la bola, a una distancia de $R/10$ m del centro de la bola sobre el lado opuesto del plano.

13. $m = \dfrac{1}{8}\pi\delta_0 a^4$; $\bar{x} = 16a/(15\pi)$, $\bar{y} = 0$, $\bar{z} = 8a/15$

15. $m = \dfrac{1}{3}k\pi a^3$; $\bar{x} = 0$, $y = \dfrac{3a}{2\pi}$

17. aprox. $5.57C/k^{3/2}$

Sección 7.5 (página 472)

1. $\left(\dfrac{4r}{3\pi}, \dfrac{4r}{3\pi}\right)$

3. $\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{\ln(1+\sqrt{2})}, \dfrac{\pi}{8\ln(1+\sqrt{2})}\right)$

5. $\left(0, \dfrac{9\sqrt{3}-4\pi}{4\pi - 3\sqrt{3}}\right)$ **7.** $\left(\dfrac{19}{9}, -\dfrac{1}{3}\right)$

9. El centroide está en el eje de simetría del hemisferio a mitad de camino entre el plano de la base y el vértice.

11. El centroide está en el eje del cono a un cuarto de su altura desde el plano de la base.

13. $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{8}\right)$ **15.** $\left(\dfrac{2r}{\pi}, \dfrac{2r}{\pi}\right)$

17. $(8/9, 11/9)$ **19.** $(0, 2/(3(\pi+2)))$

21. $(1, -2)$ **23.** $\dfrac{5\pi}{3}$ unids. al cubo

25. $(0.71377, 0.26053)$ **27.** $(1, \frac{1}{5})$

29. $\bar{x} = \dfrac{M_{x=0}}{A}$, $\bar{y} = \dfrac{M_{y=0}}{A}$,

siendo $A = \displaystyle\int_c^d (g(y) - f(y))\,dy$,

$M_{x=0} = \frac{1}{2}\displaystyle\int_c^d ((g(y))^2 - (f(y))^2)\,dy$

$M_{y=0} = \displaystyle\int_c^d y(g(y) - f(y))\,dy$

31. orientación diamante, lado hacia arriba

Sección 7.6 (página 480)

1. (a) 235 200 N, (b) 352 800 N

3. 6.12×10^8 N **5.** 8.92×10^6 N

7. 7.056×10^5 N · m

9. $2450\pi a^3 \left(a + \dfrac{8h}{3}\right)$ N · m

Sección 7.7 (página 484)

1. 11 000 \$ **3.** $8(\sqrt{x} - \ln(1 + \sqrt{x}))$ \$

5. 9063,46 \$ **7.** 5865,64 \$

9. 50 000 \$ **11.** 11 477,55 \$

13. 64 872,10 \$ **15.** $\int_0^T e^{-\lambda(t)}P(t)\,dt$

17. aprox. 23 300, 11 890 \$

Sección 7.8 (página 497)

1. no más de 2,47 € **3.** 6,81 €

5. $\mu \approx 3.5833$, $\sigma = 1.7059$, $\Pr(X \leqslant 3) = 0.4833$

7. (a) ocho tripletas (x, y, z) con $x, y, z \in \{H, T\}$
(b) $\Pr(H, H, H) = 0.166375$, $\Pr(H, H, T) = \Pr(H, T, H) = \Pr(T, H, H) = 0.136125$, $\Pr(H, T, T) = \Pr(T, H, T) = \Pr(T, T, H) = 0.111375$, $\Pr(T, T, T) = 0.091125$
(c) $f(0) = 0.911125$, $f(1) = 0.334125$, $f(2) = 0.408375$, $f(3) = 0.166375$
(d) 0.908875, (e) 1.650000

9. (a) $\dfrac{2}{9}$, (b) $\mu = 2$, $\sigma^2 = \dfrac{1}{2}$, $\sigma = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$,
(c) $\dfrac{8}{9\sqrt{2}} \approx 0{,}63$

11. (a) 3, (b) $\mu = \dfrac{3}{4}$, $\sigma^2 = \dfrac{3}{80}$, $\sigma = \sqrt{\dfrac{3}{80}}$,
(c) $\dfrac{69}{20}\sqrt{\dfrac{3}{80}} \approx 0.668$

13. (a) 6 (b) $\mu = \dfrac{1}{2}$, $\sigma^2 = \dfrac{1}{20}$, $\sigma = \sqrt{\dfrac{1}{20}}$,
(c) $\dfrac{7}{5\sqrt{5}} \approx 0.626$

15. (a) $\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}$, (b) $\mu = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \approx 0.0564$, $\sigma^2 = \dfrac{\pi - 2}{2\pi}$,
$\sigma = \sqrt{\dfrac{\pi - 2}{2\pi}} \approx 0.426$, (c) $\Pr \approx 0.68$

19. (a) 0, (b) $e^{-3} \approx 0.05$, (c) ≈ 0.046

21. aproximadamente 0.006

Sección 7.9 (página 506)

1. $y^2 = Cx$ **3.** $x^3 - y^3 = C$

5. $Y = Ce^{t^2/2}$ **7.** $y = \dfrac{Ce^{2x} - 1}{Ce^{2x} + 1}$

9. $y = -\ln(Ce^{-2t} - \frac{1}{2})$ **11.** $y = x^3 + Cx^2$

13. $y = \frac{3}{2} + Ce^{-2x}$ **15.** $y = x - 1 + Ce^{-x}$

17. $y = (1 + e^{1-10t})/10$ **19.** $y = (x + 2)e^{1/x}$

21. $y = \sqrt{4 + x^2}$ **23.** $y = \dfrac{2x}{1 + x}$, $(x > 0)$

25. b

27. Si $a = b$ la solución dada está indeterminada 0/0; en este caso la solución es $x = a^2kt/(1 + akt)$.

29. $v = \sqrt{\dfrac{mg}{k}}\dfrac{e^{2\sqrt{kg/mt}} - 1}{e^{2\sqrt{kg/mt}} + 1}$, $v \to \sqrt{\dfrac{mg}{k}}$

31. las hipérbolas $x^2 - y^2 = C$

Ejercicios de repaso (página 507)

1. aprox. 833

3. $a \approx 1.1904$, $b \approx 0.0476$

5. $a = 2.1773$ **7.** $(\frac{8}{3\pi}, \frac{4}{3\pi})$

9. aprox. 27 726 N · cm **11.** $y = 4(x - 1)^3$

13. 8798,85 €

Problemas avanzados (página 508)

1. (b) $\ln 2/(2\pi)$, (c) $\pi/(4k(k^2 + 1))$

3. $y = (r/h^3)x^3 - 3(r/h^2)x^2 + 3(r/h)x$

5. $b = -a = 27/2$ **7.** $1/\pi$

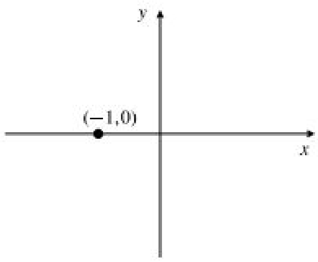
9. (a) $S(a, a, c) = 2\pi a^2 + \dfrac{2\pi ac^2}{\sqrt{a^2 - c^2}}\ln\left(\dfrac{a + \sqrt{a^2 - c^2}}{c}\right)$
(b) $S(a, c, c) = 2\pi c^2 + \dfrac{2\pi a^2 c}{\sqrt{a^2 - c^2}}\cos^{-1}\left(\dfrac{c}{a}\right)$
(c) $S(a, b, c) \approx \dfrac{b - c}{a - c}S(a, a, c) + \dfrac{a - b}{a - c}S(a, c, c)$
(d) $S(3, 2, 1) \approx 49.595$

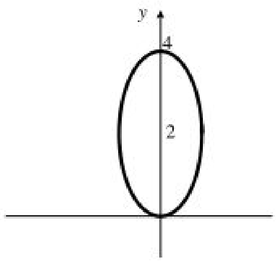
Capítulo 8
Cónicas, curvas paramétricas y curvas en polares

Sección 8.1 (página 526)

1. $(x^2/5) + (y^2/9) = 1$ **3.** $(x - 2)^2 = 16 - 4y$

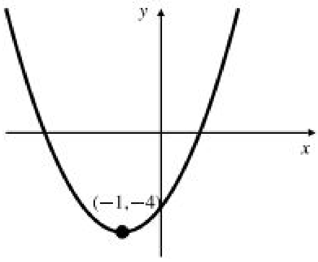
5. $3y^2 - x^2 = 3$ **7.** un solo punto $(-1, 0)$



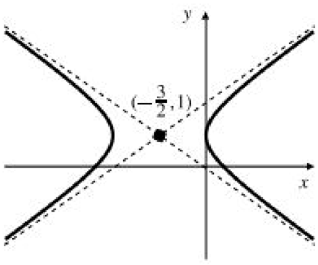


9. elipse, centro $(0, 2)$

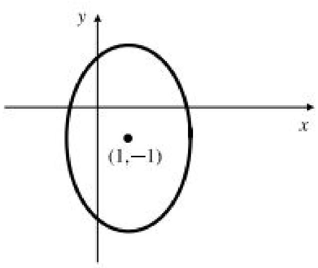
11. parábola, vértice $(-1, -4)$



13. hipérbola, centro $(-\frac{3}{2}, 1)$
asíntotas
$2x + 3 = \pm 2^{3/2}(y - 1)$

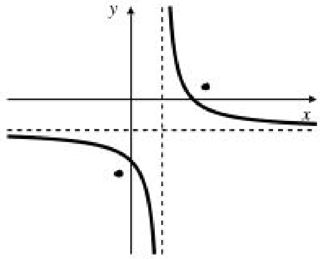


15. elipse, centro $(1, -1)$

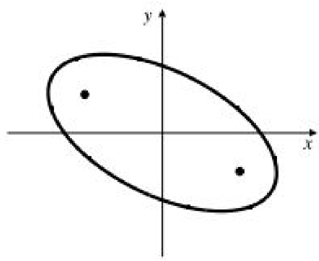


17. $y^2 - 8y = 16x$ o $y^2 - 8y = -4x$

19. hipérbola rectangular, centro $(1, -1)$
semieje $a = b = \sqrt{2}$, excentricidad $\sqrt{2}$,
focos $(\sqrt{2}+1, \sqrt{2}-1)$, $(-\sqrt{2}+1, -\sqrt{2}-1)$,
asíntotas $x = 1$, $y = -1$



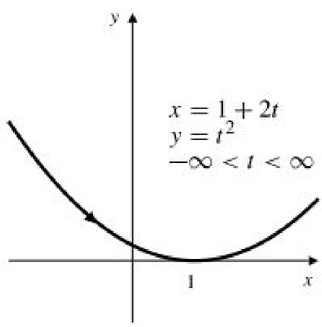
21. elipse, centro $(0, 0)$, semiejes $a = 2$, $b = 1$,
focos $\pm\left(2\sqrt{\frac{3}{5}}, -\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$



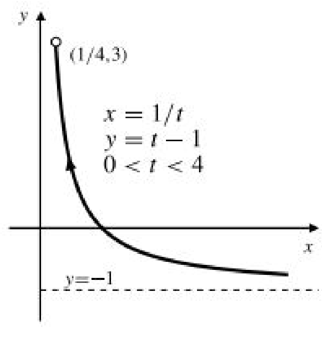
23. $(1 - \varepsilon^2)x^2 + y^2 - 2p\varepsilon^2 x = \varepsilon^2 p^2$

Sección 8.2 (página 533)

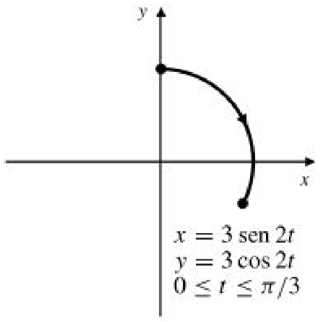
1. $y = (x - 1)^2/4$



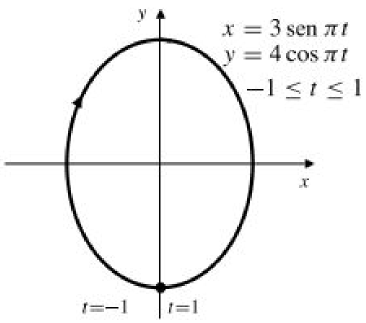
3. $y = (1/x) - 1$



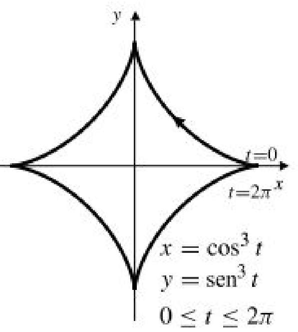
5. $x^2 + y^2 = 9$



7. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1$



9. $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$

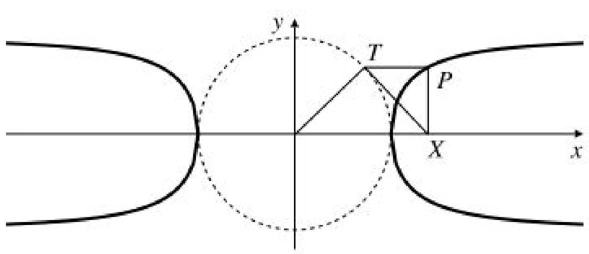


11. La mitad derecha de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$

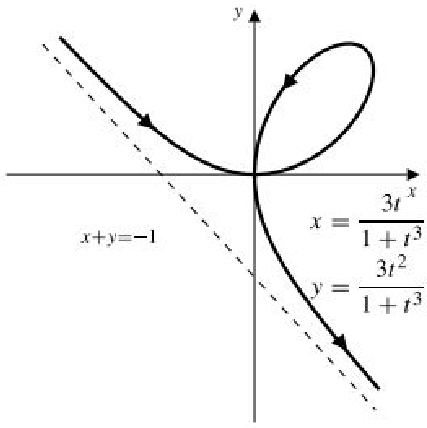
13. La curva empieza en el origen y realiza dos veces una espiral en sentido contrario al de las agujas del reloj alrededor del origen terminando en $(4\pi, 0)$

15. $x = m/2, \quad y = m^2/4, \quad (-\infty < m < \infty)$

17. $x = a \sec t,\ y = a \operatorname{sen} t;\ y^2 = a^2(x^2 - a^2)/x^2$



19. $x^3 + y^3 = 3xy$



Sección 8.3 (página 539)

1. vertical en $(1, -4)$

3. horiz. en $(0, -16)$ y $(8, 16)$; vert. en $(-1, -11)$

5. horizontal en $(0, 1)$, vertical en $(\pm 1/\sqrt{e}, 1/e)$

7. horizontal en $(0, \pm 1)$, vert. en $(\pm 1, 1/\sqrt{2})$ y $(\pm 1, -1/\sqrt{2})$

9. $-3/4$

11. $-1/2$

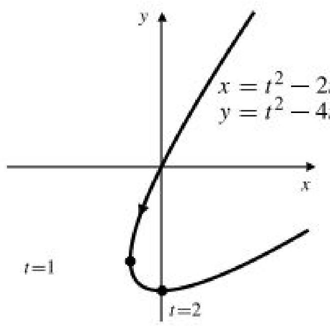
13. $x = t - 2,\ y = 4t - 2$

15. pendientes ± 1

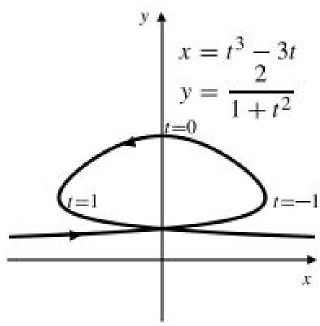
17. no suave en $t = 0$

19. no suave en $t = 0$

21.



23.



25.